

Wojciech Adamski

Matematyczne metody globalnej oceny wybranych zjawisk zachodzących w hydrosferze

Globalna analiza zjawisk przebiegających w hydrosferze oraz formułowanie prognoz zmian tych zjawisk, wynikających z interakcji pomiędzy czynnikami antropogenicznymi a środowiskiem naturalnym, wymaga zastosowania odpowiednich metod modelowania matematycznego. Niniejszy artykuł jest kompilacją wyników badań relacji człowiek–hydrosfera przy pomocy modeli stanu ustalonego i nieustalonego [1,3].

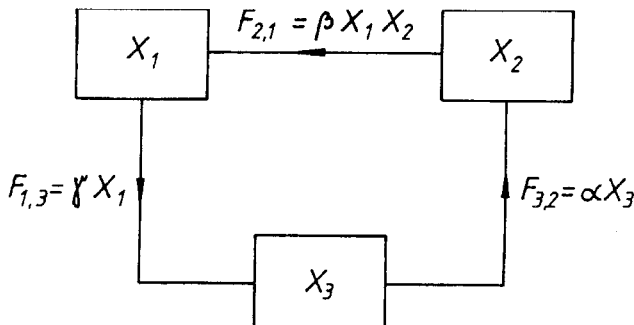
Modele stanu ustalonego

Jeżeli dopływ substancji do układu, którym może być zarówno środowisko wodne, atmosfera jak i organizmy roślinne czy zwierzęce, jest równy odpływowi, czyli gdy ilość substancji w układzie jest stała, to mamy do czynienia ze stanem ustalonym lub równowagowym, którego uproszczony zapis jest następujący:

$$M/F_0 = M/F_1 = T \quad (1)$$

gdzie M oznacza masę substancji w układzie, $F_0(F_1)$ – prędkość dopływu (odpływu) do (z) układu, zaś T – czas retencji w układzie.

Model stanu ustalonego może być wykorzystany do globalnej analizy takich zjawisk, jak np. retencja wody w atmosferze lub węgla w biosferze, zawartość w atmosferze naturalnego dwutlenku siarki oraz dwutlenku siarki pochodzenia antropogenicznego, stan jezior zasilanych stałymi ładunkami zanieczyszczeń, czy wreszcie obieg fosforu w zbiornikach wodnych lub też obieg wody w przyrodzie. Dla zilustrowania możliwości wykorzystania modelu stanu ustalonego przeanalizowano zagadnienie obiegu fosforu w jeziorze przy nagłym zasileniu go fosforem nieorganicznym oraz cykl obiegu wody w przyrodzie przy zmniejszeniu stopnia jej odparowania z powierzchni lądów. Do analizy cyrkulacji fosforu w jeziorze użyty może być model, którego strukturę ilustruje schemat:



W modelu tym X_1 oznacza fosfor w biomase organizmów żywych, X_2 – fosfor nieorganiczny, natomiast X_3 – fosfor w martwej materii organicznej. Każda z wartości X może być wyrażona w milimolach fosforu na metr sześcienny wody w jeziorze. Parametr $F_{i,j}$ oznacza przepływ fosforu ze zbioru (i) do zbioru (j) w $\text{mmolP/m}^3\text{d}$. Średnie zawartości fosforu w jeziorze w formach X_1 , X_2 oraz X_3 w stanie ustalonym przyjęto jako równe odpowiednio: 0,2; 0,1 oraz 1,0 mmolP/m^3 , przy założonym średnim czasie retencji fosforu w żywej biomase wynoszącym cztery doby [2,3]. Prezentowane zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia warunków nowego stanu ustalonego, kiedy do jeziora wprowadzony zostanie w czasie $t=0$ jednorazowo fosfor nieorganiczny w ilości 0,02 mmolP/m^3 . Powyższe zagadnienie zostało rozwiązane przy założeniu, że stałe szybkości reakcji α , β i γ nie ulegają zmianie.

Przepływ fosforu ze zbioru X_1 do X_3 , wynikający z wydzielania fosforu przez organizmy żywe oraz z ich obumierania, jak również przepływ ze zbioru X_3 do X_2 , będący rezultatem ich rozkładu, mogą być oszacowane jako procesy liniowe sterowane przez donory. Przepływ fosforu ze zbioru X_2 do X_1 jest sterowany zarówno przez donory jak i przez receptory. Sterowanie receptorowe wynika z faktu, że im większe będzie stężenie biomasy organizmów żywych, tym większy będzie pobór fosforu nieorganicznego przez tę biomasę. I przeciwnie, duża zawartość fosforu nieorganicznego nie powoduje zwiększenia stopnia rozkładu biomasy oraz wzrostu przepływu fosforu ze zbioru X_3 do X_2 . Podobnie duża zawartość fosforu w martwej materii organicznej nie powoduje wzrostu szybkości obumierania biomasy i wobec tego nie oddziałuje na zwiększenie przepływu fosforu ze zbioru X_1 do X_3 .

Pierwszym etapem określenia odpowiedzi systemu na wprowadzenie ładunku fosforu musi być wyznaczenie wartości stałych szybkości α , β i γ . Podstawowy warunek stanu ustalonego zakłada, że dopływ do układu równa się odpływowi:

$$\beta X_1 X_2 = \gamma X_1 \quad (2)$$

$$\alpha X_3 = \beta X_1 X_2 \quad (3)$$

$$\gamma X_1 = \alpha X_3 \quad (4)$$

Przyjmując założone zawartości fosforu w poszczególnych zbiorach uzyskuje się następujące zależności:

$$0,02 \beta = 0,2 \gamma \quad (5)$$

$$\alpha = 0,02\beta \quad (6)$$

$$0,2 \gamma = \alpha \quad (7)$$

Równanie (7) jest tożsamościowe w stosunku do równań (5) i (6), tak jak równanie (4) wynika z równań (2) i (3). Oznacza to, że z układu równań (5)+(7) nie można wyznaczyć trzech stałych szybkości. Dla ich wyznaczenia należy wykorzystać fakt, że średni czas retencji fosforu w żyjącej biomase wynosi cztery doby ($X_1/\gamma X_1 = 4d$). Tak więc wartości stałych szybkości wynoszą odpowiednio: $\gamma = (4d)^{-1}$, $\beta = (0,4d)^{-1}$, $\alpha = (20d)^{-1}$.

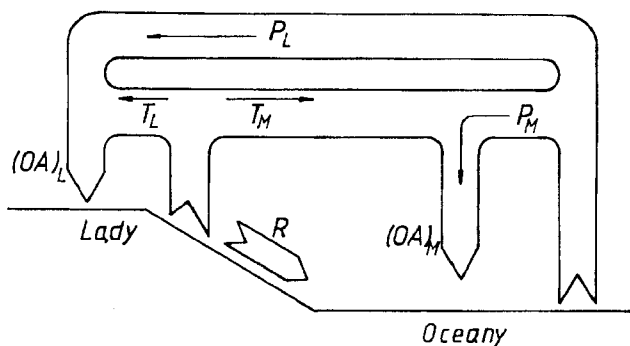
Kolejny etap analizy zagadnienia to ustalenie nowych wartości X_1' po awaryjnym dopływie ładunku fosforu i po osiągnięciu nowego stanu ustalonego. Wartości X_1' muszą spełniać te same równania stanu ustalonego (2)+(4), ponieważ stałe szybkości reakcji nie uległy zmianie. Wynikające stąd nowe warunki stanu ustalonego są następujące:

$$X_1' X_2' / 0,4 = X_1' / 4 \quad (8)$$

$$X_3' / 20 = X_1' X_2' / 0,4 \quad (9)$$

Z równania (8) wynika, że $X_2' = 0,1 \text{ mmolP/m}^3$. Widać zatem, że po osiągnięciu nowego stanu ustalonego ilość fosforu w zbiorze X_2 nie uległa zmianie. Z równania (9) wynika natomiast, że $X_3' = 5X_1'$. Ponieważ do zamkniętego układu wprowadzony został fosfor w ilości $0,02 \text{ mmolP/m}^3$, więc z prostego równania bilansowego wynika, że $X_1' = 0,203 \text{ mmolP/m}^3$ oraz $X_3' = 1,017 \text{ mmolP/m}^3$. Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że rozwiązanie powyższego zagadnienia jest niezależne od zbioru, do którego wprowadzona została nowa dawka fosforu. Wcześniej zasygnalizowany fakt, że wartość zbioru X_2 nie ulega zmianie, wynika z równania stanu ustalonego dla tego zbioru ($X_2 = \alpha/\beta$).

Inne zagadnienie, do analizy którego można zastosować model stanu ustalonego, to globalne oszacowanie zmian w cyrkulacji wody, czyli wielkości opadów atmosferycznych na powierzchni lądów oraz wielkości spływów z powierzchni lądów do mórz przy założeniu, że parowanie wody z powierzchni lądów zostałoby równomiernie zmniejszone o 20 %, np. jako rezultat rozległej likwidacji pól uprawnych i obszarów leśnych. Problem ten wymaga identyfikacji poszczególnych zbiorów w całym systemie oraz dokładnego zbilansowania przepływów pomiędzy poszczególnymi zbiorami. Przepływy wody zilustrowane na poniższym schemacie zdefiniowane są następująco:



$(OA)_L$ – wielkość opadów atmosferycznych na powierzchnię lądów,

$(OA)_M$ – wielkość opadów atmosferycznych na powierzchnię oceanów,

R – spływ powierzchniowy do oceanów,

T_L – parowanie wody z lądów, która w postaci opadów atmosferycznych powraca na powierzchnię lądów,

T_M – parowanie wody z powierzchni lądów, która w postaci opadów atmosferycznych przedostaje się do oceanów,

P_M – parowanie wody z powierzchni oceanów, która w postaci opadów atmosferycznych powraca do oceanów,

P_L – parowanie wody z powierzchni oceanów, która w postaci opadów atmosferycznych przedostaje się na powierzchnię lądów.

Postępując się przytoczonymi definicjami zagadnienie wymagające rozwiązania można sformułować w następujący sposób: jak zmieni się spływ powierzchniowy oraz opad atmosferyczny na powierzchnię lądów, kiedy parametry T_L oraz T_M zostaną zmniejszone o 20 %. Istnieją trzy relacje pomiędzy siedmioma zdefiniowanymi wyżej wielkościami. Pierwsza zależność opisuje bilans wody w oceanach:

$$(OA)_M + R = P_M + P_L \quad (10)$$

Druga bilansuje wodę na kontynentach przy założeniu, że zasoby wód podziemnych nie reagują na wprowadzane zmiany w ekosystemie (20-procentowe zmniejszenie powierzchni pokrytych roślinnością):

$$(OA)_L = R + T_L + T_M \quad (11)$$

Trzecia zależność zakłada, że przepływ wody z kontynentów do oceanów równy jest przepływowi z oceanów na powierzchnię kontynentów:

$$R + T_M = P_L \quad (12)$$

Każde dwie z trzech powyższych relacji mogą być wyprowadzone z trzeciej relacji oraz dwóch tożsamości, wynikających z definicji poszczególnych wielkości:

$$(OA)_L = T_L + P_L \quad (13)$$

$$(OA)_M = T_M + P_M \quad (14)$$

Równania (10)+(12) przedstawiają relacje pomiędzy siedmioma wielkościami. Zatem do rozwiązania problemu i wyznaczenia wszystkich siedmiu wielkości niezbędna jest znajomość co najmniej czterech niezależnych wartości empirycznych. Na podstawie danych literaturowych [3,4] przyjęto następujące wartości poszczególnych wielkości: $(OA)_L = 108 \cdot 10^3 \text{ km}^3/\text{a}$, $(OA)_M = 410 \cdot 10^3 \text{ km}^3/\text{a}$ oraz $R = 46 \cdot 10^3 \text{ km}^3/\text{a}$. Ponadto przyjęto, że w przybliżeniu 25 % wody odparowanej z kontynentów zasila w postaci opadów atmosferycznych morza i oceany, a 75 % wody

powraca na powierzchnię kontynentów ($T_L = 3T_M$). Przyjęte dane oraz szacunkowe informacje o rozkładzie opadów atmosferycznych generowanych z powierzchni kontynentów pozwalają na wyznaczenie pozostałych wielkości niezbędnych do rozwiązania zagadnienia, które wynoszą: $T_L = 46,5 \cdot 10^3 \text{ km}^3/\text{a}$, $T_M = 15,5 \cdot 10^3 \text{ km}^3/\text{a}$, $P_M = 394,5 \cdot 10^3 \text{ km}^3/\text{a}$, $P_L = 61,5 \cdot 10^3 \text{ km}^3/\text{a}$.

Jeżeli obniżenie parowania jest równomiernie rozłożone na wszystkich kontynentach, to zarówno T_L jak i T_M będą mniejsze o 20 %. Założenie takie byłoby obciążone znacznie większym błędem, gdyby analizowano obniżenie parowania tylko wzdłuż linii brzegowej kontynentów. Można więc przyjąć, że nowa sytuacja nie spowoduje zmiany w intensywności parowania wody z oceanów, która w postaci opadów atmosferycznych powraca na powierzchnię oceanów ($P_M' = P_M$). Podobnie zmianie nie ulegnie intensywność parowania wody z powierzchni oceanów, która w postaci opadów atmosferycznych powraca na powierzchnię lądów ($P_L' = P_L$). Jednocześnie $T_L' = 0,8T_L$ oraz $T_M' = 0,8T_M$. Tak więc, uwzględniając powyższe wartości szybkości przepływów pomiędzy poszczególnymi systemami, równania (12) i (13) po uproszczeniu przyjmą następującą postać:

$$R' = R + 0,2T_L \quad (15)$$

$$(OA)_L' = (OA)_L - 0,2T_L \quad (16)$$

Podstawiając odpowiednie dane można wykazać, że obniżenie parowania o 20 % na skutek eliminacji roślinności spowoduje w skali globalnej wzrost spływów powierzchniowych do mórz i oceanów do wartości $R' = 49,1 \cdot 10^3 \text{ km}^3/\text{a}$, co stanowi 7-procentowy wzrost spływu w stosunku do sytuacji panującej przed zmniejszeniem parowania. Podobnie wielkość opadów atmosferycznych obniży się o 9 % do wartości $(OA)_L' = 98,7 \cdot 10^3 \text{ km}^3/\text{a}$.

Modele stanu nieustalonego

Trudniejszą do rozwiązania klasę problemów stanowią te, w których następuje zmiana zawartości zbioru w funkcji czasu. Taka sytuacja występuje np. kiedy dopływ F_o nie bilansuje się z odpływem F_i . Jeżeli $F_o > F_i$, to wielkość zbioru maleje w czasie, natomiast gdy $F_o < F_i$, to w układzie generowane są dodatkowe elementy. W obu przypadkach nie można jednak zdefiniować czasu retencji poszczególnych elementów w układzie. Matematyczny zapis modelu stanu nieustalonego w ogólnej formie jest następujący:

$$dM/dt = F_o - F_i \quad (17)$$

Model składający się z wielu zbiorów, w których liczba elementów jest funkcją czasu, przy występowaniu wzajemnych relacji pomiędzy zbiorami, wymaga sformułowania układu równań w postaci (17). Przykładami problemów globalnych, których rozwiązanie wymaga zastosowania modelu stanu nieustalonego, może być np. oszacowanie czasu eksploatacji światowych zasobów wód podziemnych przy określonych warunkach początkowych i brzegowych, czy też ustalenie prognozy przyrostu zanieczyszczeń w jeziorach przy określonych dopływach zanieczyszczeń.

Pierwszy z tych problemów rozwiązano wykorzystując zjawisko utrzymywania się jednostkowego zapotrzebowania na wodę

na stałym poziomie [5] oraz zakładając, że jedynym źródłem wody są zasoby wód podziemnych, a możliwości jej poboru nie są limitowane żadnymi czynnikami. Zatem ogólnoswiatowy przyrost szybkości konsumpcji wód podziemnych będzie związany ze światowym przyrostem ludności (X , %). Założenie stałego rocznego przyrostu szybkości zużycia wód podziemnych powoduje, że zasoby tych wód będą się zmniejszały z eksponentialnie rosnącą szybkością. W rozważaniach przyjęto ponadto, iż w skali globalnej, przy braku poboru wód podziemnych, warstwa wodonośna może być traktowana jako układ stanu ustalonego. Znacząco to, że zasilanie warstwy wodonośnej, np. opadami atmosferycznymi, jest równe odpływowi podziemnemu, który łącznie ze spływami powierzchniowymi szacowany jest w skali globalnej na około $46 \cdot 10^3 \text{ km}^3/\text{a}$. Tak więc odpływ z układu (tzn. konsumpcja wód podziemnych) definiowany jest równaniem:

$$F(t) = F(0)e^{rt} \quad (18)$$

gdzie czas $t=0$ określa moment wyjściowy.

Przyjmując jako ten moment rok 1980 oraz wielkość zapotrzebowania na wodę dla potrzeb komunalnych w tym roku na poziomie $F(0) = 220 \text{ km}^3/\text{a}$ [3,4], stała szybkości zużycia wody (r , $1/\text{a}$) może być wyznaczona z następujących warunków:

$$F(1) = (1 + 0,01X)F(0) \quad (19)$$

$$e^r = 1 + 0,01X \quad (20)$$

Po zlogarytmowaniu równania (20) stała $r = \ln(1 + 0,01X)$. Jeżeli $M(t)$ jest wielkością zasobów wód podziemnych w czasie (t), to przy światowych zasobach tych wód w roku 1980 ($M(0) = 8,3 \cdot 10^6 \text{ km}^3$) szybkość zmian $M(t)$ opisana jest równaniem:

$$dM/dt = -F(0)e^{rt} \quad (21)$$

Po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu równania w granicach od $t=0$ do $t=T$ oraz od $M=M(0)$ do $M=M(t)$ otrzymuje się:

$$\int_{M(0)}^{M(t)} dM = - \int_0^T F(0)e^{rt} dt \quad (23)$$

Po rozwiązaniu równanie to przyjmuje postać:

$$M(t) = M(0) + [F(0)/r](1 - e^{rt}) \quad (23)$$

Zasoby wód podziemnych, przy założonych trendach, będą zużyte w czasie T , gdy $M(t) = 0$. Czas ten może być wyznaczony po przekształceniu równania:

$$M(0) + [F(0)/r](1 - e^{rT}) = 0 \quad (24)$$

do postaci:

$$rT = \ln[1 + rM(0)/F(0)] \quad (25)$$

Dla przyjętych na wstępie założeń oraz następujących danych: $X=2\%$, $F(0)=220\text{ km}^3/\text{a}$ oraz $M(0)=8,3\cdot 10^6\text{ km}^3$, czas, po którym światowe zasoby wód podziemnych z 1980 r. uległyby wyczerpaniu, wynosi około 330 lat.

Innym zagadnieniem, wymagającym rozwiązania modelu stanu nieustalonego, jest np. określenie równania masy zanieczyszczeń dla jeziora w funkcji czasu, od momentu rozpoczęcia wprowadzania ich do tego jeziora. Podstawowe dane niezbędne do rozwiązania tego problemu to znajomość objętości i powierzchni jeziora, szybkości dopływu i odpływu wody, szybkości parowania wody oraz stanu jej zanieczyszczenia w czasie $t=0$. Ponadto musi być rozpoznany charakter zanieczyszczeń i ich zachowanie się w środowisku wodnym. W niniejszych rozważaniach przyjęto, że zanieczyszczenia nie są lotne, a więc parowanie wody z powierzchni jeziora nie będzie sposobem ich usuwania. Założono również, że nie będzie zachodziła transformacja zanieczyszczeń w środowisku. Zatem czynnikami wpływającymi na stężenie zanieczyszczeń będą dopływy i odpływy wody oraz jej przesiąkanie do gruntu. Tak więc niezbędne jest ustalenie rodzajów przepływów wody w jeziorze oraz ich szybkości.

Przyjęto, że analizowane jezioro w stanie ustalonym ma objętość $V=10^6\text{ m}^3$, a szybkość powierzchniowego dopływu wody (F_0) równa jest szybkości odpływu powierzchniowego (F_i). Dla powierzchni jeziora $F=6\cdot 10^4\text{ m}^2$ oraz intensywności parowania równej 1 m/a , odpływ wody w wyniku tego procesu wynosi $0,6\cdot 10^5\text{ m}^3/\text{a}$. Przyjmując odpływ wody z jeziora na skutek infiltracji w wysokości $0,4\cdot 10^5\text{ m}^3/\text{a}$, sumaryczny odpływ wody z jeziora wyniesie $1,0\cdot 10^5\text{ m}^3/\text{a}$. W czasie (t) masa zanieczyszczeń wprowadzonych do jeziora wynosi $M_z(t)$, a ich stężenie przy traktowaniu jeziora jako reaktora o pełnym wymieszaniu wynosi $C=M_z(t)/V$. Zatem dla powyższych danych roczny odpływ ładunku zanieczyszczeń z układu wyniesie $F_{z0}=0,1M_z(t)$. Ładunek zanieczyszczeń dopływających do jeziora przyjęto na poziomie $F_{zi}=4\cdot 10^3\text{ kg/a}$. Wykorzystując do zbilansowania układu równanie stanu nieustalonego (17) można zapisać:

$$dM_z/dt = 40 - 0,1M_z \quad (26)$$

Jest to równanie różniczkowe, którego ogólna postać dla rozwiązania tego zagadnienia może być zapisana jako:

$$dx/dt = a + bx \quad (27)$$

a ogólne jego rozwiązanie w postaci:

$$x(t) = -a/b + ce^{bt} \quad (28)$$

Stała (c) musi być wyznaczona ze specyficznego warunku początkowego, określającego stan układu przy $t=0$:

$$x(0) = -a/b + c \quad (29)$$

W rozpatrywanym przypadku $a=40$, $b=-0,1$ oraz, jeżeli zanieczyszczenia zaczynają być wprowadzane do jeziora w czasie $t=0$, $x(0)=0$ i wówczas stała $c=a/b$. Zatem przyrost masy zanieczyszczeń w jeziorze przy założonych danych wyjściowych może być zapisany w postaci:

$$M_z(t) = 400(1 - e^{-0,1t}) \quad (30)$$

Podsumowanie

Z przedstawionych rozważań wynika, że do opisu większości zjawisk oraz symulacji zmian antropogenicznych zachodzących w środowisku można wykorzystać względnie proste modele. Zastosowanie modeli stanu ustalonego i nieustalonego do opisu konkretnych relacji człowiek–hydrosfera wymaga przyjęcia pewnych założeń upraszczających zagadnienie, dokładnego zdefiniowania zbiorów systemu oraz wzajemnych przepływów elementów pomiędzy zbiorami. Wymagana jest również znajomość podstawowych danych, które można uzyskać z opracowań statystycznych. W niniejszym artykule przedstawiono przykłady rozwiązań tego typu problemów.

LITERATURA

1. G. TCHOBANOGLOUS, E. D. SCHROEDER: Water Quality – Characteristics, Modeling, Modification. University of California at Davis, Addison-Wesley Publishing Company, 1987.
2. R. M. GARRELS, F. T. MACKENZIE, C. HUNT: Chemical Cycles and the Global Environment. William Kaufmann Inc., Los Altos, California, 1975.
3. J. HARTE: A course in Environmental Problem Solving. University Science Books, Mill Valley, California, 1988.
4. R. C. WEAST: Handbook of Chemistry and Physics: A Ready-Reference Book of Chemical and Physical Data. Boca Raton, Florida, 1982.
5. S. A. KLECZKOWSKI i in.: Ochrona wód podziemnych. Wydawnictwa Geologiczne, Warszawa 1984.

MATHEMATICAL METHODS FOR A GLOBAL EVALUATION OF SOME PHENOMENA OCCURRING IN THE HYDROSPHERE

Mathematical models of steady and non-steady state were discussed from the viewpoint of their application to the global analysis of the phenomena associated with the anthropogenic factors/natural environment interaction. Consideration was given to the following items: phosphorus circulation in a water reservoir with abrupt feed of phosphorus com-

ponds; variations in global water circulation due to transpiration changes; prediction of global groundwater consumption in terms actual trends in water demand, and – last but not least – the increment of pollution loads entering the lake continually at a given flow rate in the system.