

Krystyna M. Wojciechowska

STEROWANIE AKUMULACJĄ ZANIECZYSZCZEŃ W PROCESIE FILTRACJI

Rozwój badań i wprowadzenie do eksploatacji procesów filtracji w złożach wielowarstwowych, filtracji głęboko-złożowej oraz filtracji bezpośredniej, zwróciły uwagę na problem rozkładu zanieczyszczeń akumulowanych w złożu filtracyjnym. Wymienione typy filtracji są bowiem bardziej wrażliwe na mogące wystąpić odchyłki rozkładu zanieczyszczeń od tego, który założono przy ich projektowaniu, w porównaniu z klasycznym procesem filtracji w złożu piaszkowym. Przykładowo w jednej z metod projektowania filtrów wielowarstwowych dobiera się (przy ustalonych parametrach wody filtrowanej) materiał filtracyjny, granulację i grubość dla poszczególnych warstw tak, aby w każdej z nich wystąpił założony stopień zatrzymania zawiesiny [1]. W przypadku wystąpienia innych niż zakładane parametrów wody uzdatnianej, rozkład akumulowanych w złożu zanieczyszczeń nie jest optymalny, co prowadzi do zmniejszenia efektywności filtracji wielowarstwowej. Wobec powyższego, ogólny problem rozkładu zanieczyszczeń akumulowanych w złożu można podzielić na dwa: projektowy i eksploatacyjny.

W problemie projektowym, na drodze analitycznej lub symulacji, przy ustalonych parametrach wody filtrowanej dąży się do określenia optymalnego (w sensie przyjętego kryterium) rozkładu akumulowanych zanieczyszczeń poprzez dobór materiału filtracyjnego, granulacji i grubości poszczególnych warstw. Ostatecznym wynikiem są parametry konstrukcyjne filtru i optymalny rozkład zaakumulowanych zanieczyszczeń w funkcji głębokości złoża i czasu trwania filtracji.

W problemie eksploatacyjnym, należy określić taki sposób prowadzenia fizycznego procesu filtracji, by odpowiadał mu rozkład zanieczyszczeń określony w fazie projektowej. Rozkład realizowany w trakcie eksploatacji różni się od założonego na skutek występowania zakłóceń, niemożliwych do uwzględnienia przy projektowaniu. Są to zmiany parametrów filtrowanej wody, niedokładności modelu, będącego podstawą projektowania oraz błędy eksploatacyjne i inne. Opisany powyżej problem, można nazwać sterowaniem procesem odkładania zanieczyszczeń w złożu filtracyjnym w obecności za-

klóceń, oddziałujących na proces. W zależności od rodzaju zakłóceń, można wyróżnić dwie podstawowe struktury sterowania:

Pierwszą z nich jest kompensacja zakłóceń, która może być stosowana w przypadku możliwości pomiaru wielkości zakłócenia. W rozpatrywanym procesie zakłóceniem tego typu są parametry wody filtrowanej.

Drugą strukturą jest sprzężenie zwrotne. Dla realizacji tej struktury nie jest wymagana pomiarowa znajomość zakłóceń, wymaga się natomiast pomiaru wielkości sterowanej (rozkład zanieczyszczeń w złożu), istnienia wielkości sterującej (mającej wpływ na wielkość sterowaną) oraz znajomości modelu sterowanego procesu.

Poniżej rozpatrzono możliwości realizacji sterowania w strukturze ze sprzężeniem zwrotnym. W tym celu omówiono fizyczny model procesu filtracji i określono na tej podstawie możliwe wielkości sterujące i pomiarowe. W kolejnych punktach przedstawiono przekształcenia modelu fizycznego do postaci, umożliwiającej syntezę prawa sterowania.

Zastosowano linearyzację modelu w połączeniu z aproksymacją, metodą kolokacji ortogonalnej, w wyniku czego uzyskano liniowy (różniczkowy), niestacjonarny model procesu, dla którego sformułowano zadanie sterowania i podano strukturę uzyskanego liniowego prawa sterowania.

Fizyczny model procesu filtracji

Proces filtracji w złożach granulowanych był szeroko badany pod kątem ustalenia jego modelu matematycznego. Modele takie przedstawiono m. in. w pracach [2—5]. Różnią się one sposobami określania pewnych współczynników lub dodatkowymi wyrazami, niemniej ich podstawowa struktura jest taka sama [5]. Poniżej wykorzystano model z zastosowaniem oznaczeń, mających na celu uwypuklenie zależności od zmiennych sterujących [6].

Podstawowymi równaniami modelu są:

— równanie określające zmianę koncentracji zanieczyszczeń w filtrowanej wodzie w funkcji głębokości złoża

$$\frac{\partial c_w}{\partial z}(z, t) = -\lambda(\cdot) c_w(z, t) \quad (1)$$

— równanie bilansu zanieczyszczeń w złożu

$$\frac{\partial \sigma_w}{\partial t}(z, t) = -v_w(t) \frac{\partial c_w}{\partial z}(z, t) \quad (2)$$

— równanie linii ciśnień w funkcji głębokości złoża

$$\frac{\partial h_w}{\partial z}(z, t) = \left(\frac{\partial h_w}{\partial z} \right)_0 + a(\cdot) \sigma_w(z, t) \quad (3)$$

Dla powyższych równań obowiązują następujące warunki początkowe i brzegowe: $\sigma_w(z, 0) = 0$, $h_w(z, 0)$, $c_w(0, t) = c_0$. Doświadczenia z zakresu filtracji pozwalają na stwierdzenie, że wielkościami sterującymi mogą być: $v_w(t)$ — prędkość filtracji i $d_w(t)$ — dawka wapna, regulująca pH wody. W przypadku prędkości filtracji znane są analityczne postacie zależności współczynników (λ) i (α) od tej prędkości:

$$\lambda = a \cdot \frac{S^{1,35}}{v_w(t)^{0,25}} \cdot \left(1 + \frac{b}{S^{0,65}} \cdot \frac{\sigma_w(z, t)}{m_0} \right)^x$$

$$\left(1 - \frac{\sigma_w(z, t)}{m_0} \right)^y \cdot \left(1 - \frac{\sigma_w(z, t) [1 + v_w(t)]^{0,75}}{m_0} \right) f_A$$

$$\text{gdzie } A = \frac{S^{0,61}}{v_w(t)^{0,24}}, S = \frac{6(1 - m_0)}{\psi d_z} \quad (4)$$

$$\alpha = e S^{0,9} v_w(t)^{0,4} \quad (5)$$

W powyższych wzorach:

- m_0 — porowatość złoża czystego
- S — powierzchnia właściwa ziaren
- ψ — kulistość ziaren
- d_z — średnica ziaren
- a, b, e, f — współczynniki.

W przypadku pH (dawka $d(t)$), nie jest znana jawna analityczna zależność współczynników (λ) i (α) od pH. Na istnienie takiej zależności wskazują jednak wyniki badań eksperymentalnych [11]. Ostatecznie dla celów dalszych rozważań, współczynniki (λ) i (α) można przyjmować w postaci:

$$\lambda = \lambda(p, v_w(t), d_w(t), \sigma_w(z, t))$$

$$\alpha = \alpha(p, v_w(t), d_w(t)) \quad (6)$$

gdzie (p) jest zbiorczym oznaczeniem parametrów konstrukcyjnych filtru, takich jak porowatość złoża i średnica ziaren. Model fizyczny (1), (2), (3) wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi oraz współczynnikami (λ) i (α), zależącymi od wielkości sterujących, stanowi podstawę konstruowanego dalej modelu dla celów sterowania.

Model zlinearyzowany i jego aproksymacja

Omówiony wyżej model fizyczny jest modelem nieliniowym. Dla celów sterowania wystarczającym jest model liniowy, powstały w wyniku jego linearyzacji. Model zlinearyzowany opisuje związek pomiędzy przyrostami wielkości sterujących względem ich wartości

nominalnych a odpowiadającymi im przyrostami: koncentracji zanieczyszczeń, ilości odłożonych zanieczyszczeń i ciśnienia względem ich wielkości nominalnej. Przyjęto, że:

$$\begin{aligned} v_w(t) &= v_n(t) + v(t) \\ d_w(t) &= d_n(t) + d(t) \\ c_w(z, t) &= c_n(z, t) + c(z, t) \\ \sigma_w(z, t) &= \sigma_n(z, t) + \sigma(z, t) \\ h_w(z, t) &= h_n(z, t) + h(z, t) \end{aligned} \quad (7)$$

oraz, że wielkości nominalne $v_n(t)$, $d_n(t)$, $c_n(z, t)$, $\sigma_n(z, t)$, $h_n(z, t)$, wyznaczone zostały na etapie projektowania i spełniają równania (1), (2), (3) wraz z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi.

Podstawiając równania (7) do ogólnych równań modelu i pomijając w jego rozwinięciu wyrażenia rzędu wyższego niż pierwszy, otrzymano poszukiwane liniowe równanie dla przyrostów.

Ma ono postać:

$$\frac{\partial c}{\partial z}(z, t) = a_{11}(z, t)c(z, t) + a_{12}(z, t)\sigma(z, t) + b_{11}(z, t)v(t) + b_{12}(z, t)d(t) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial c}(z, t) = a_{21}(t) \frac{\partial c}{\partial z}(z, t) + b_{21}(z, t)v(t) \quad (2a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}(z, t) = a_{32}(t)\sigma(z, t) + b_{31}(t)v(t) + b_{32}(t)d(t) \quad (3a)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_{11}(z, t) &= -\lambda(p, v_n(t), d_n(t), \sigma_n(z, t)) \\ a_{12}(z, t) &= -c_n(z, t) \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \bigg|_{v_n} (t), d_n(t), \sigma_n(z, t) \\ b_{11}(z, t) &= -c_n(z, t) \frac{\partial \lambda}{\partial v} \bigg|_{v_n} (t), d_n(t), \sigma_n(z, t) \\ b_{12}(z, t) &= -c_n(z, t) \frac{\partial \lambda}{\partial d} \bigg|_{v_n} (t), d_n(t), \sigma_n(z, t) \\ a_{21}(t) &= v_n(t) \\ b_{21}(z, t) &= -\frac{\partial c_n}{\partial z}(z, t) \\ a_{32}(t) &= k(p, v_n(t), d_n(t)) \\ b_{31}(t) &= \frac{\partial k}{\partial v} \bigg|_{v_n} (t), d_n(t) \\ b_{32}(t) &= \frac{\partial k}{\partial d} \bigg|_{v_n} (t), d_n(t) \end{aligned}$$

Model zlinearyzowany (1a), (2a), (3a) może już stanowić podstawę do syntezy prawa sterowania. Ze względu jednak na lepiej opracowaną teorię sterowania, opartą na modelach różniczkowych zwyczajnych, aproksymowano go modelem różniczkowym zwyczajnym, odpowiednio wysokiego rzędu. Dla celów aproksymacji proponuje się metodę kollokacji ortogonalnej. Wyrażenia aproksymujące pochodne względem zmiennej przestrzennej mają postać:

$$\frac{\partial c}{\partial z}(z_j, t) = \sum_{i=0}^{n+1} F_i^{(1)}(z_j) c_i(t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}(z_j, t) = \sum_{i=0}^{n+1} F_i^{(1)}(z_j) h_i(t) \quad (8)$$

$$\text{gdzie } F_i^{(1)}(z_j) = \left. \frac{d}{dz} F_i(z) \right|_{z=z_j}$$

Natomiast wyrażenie aproksymujące pochodną po czasie ma postać:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}(z_j, t) = \frac{d\sigma_j}{dt}(t). \quad (9)$$

Stosując zapis wektorowy otrzymano po przekształceniach skróconą postać modelu:

$$\dot{\underline{\sigma}}(t) = A(t)\underline{\sigma}(t) + B(t)\underline{u}(t) \quad (10)$$

$$\underline{h}(t) = C(t)\underline{\sigma}(t) + D(t)\underline{u}(t) \quad (11)$$

Układ (10), (11) przedstawia standardową w teorii sterowania postać modelu dynamicznego, mogącego stanowić podstawę do syntezy prawa sterowania. Równanie (10) jest równaniem stanu reprezentowanego przez wektor $\underline{\sigma}(t)$. Równanie (11) jest równaniem pomiarowym wiążącym wielkość, która może być mierzona (rozkład ciśnień w punktach koloekacji) ze stanem. Jeżeli w układzie (10), (11) założyć, że wielkością sterującą jest jedynie $v(t) = v_w(t) - v_n(t)$, to wielkość $d(t) = d_w(t) - d_n(t)$ wyrażająca odchyłkę pH wody od wielkości nominalnej, może być traktowana jako zakłócenie.

Podobnymi zakłóceniami są wszystkie inne czynniki, nie uwzględnione w modelu, a mające wpływ na przebieg procesu filtracji. Stąd, model (10), (11) może być zapisany z jawnym uwzględnieniem zakłóceń w postaci:

$$d\underline{\sigma} = (A(t)\underline{\sigma}(t) + B(t)\underline{u}(t) + \underline{w}(t)) dt \quad (12)$$

$$\underline{h}(t) = C(t)\underline{\sigma}(t) + D(t)\underline{u}(t) + \underline{v}(t) \quad (13)$$

Zakłóceniom $\underline{w}(t)$, $\underline{v}(t)$ można nadać model losowy przyjmując, że są one białymi szumami gaussowskimi z zerowymi wartościami średnimi i macierzami kowariancji.

Problem sterowania i postać prawa sterowania

Przypominając, że kolejnymi składowymi wektora $\underline{\sigma}(t)$, są odchyłki ilości zanieczyszczeń odłożonych na głębokościach $z_0, \dots, z_{n+1}$ (punkty koloekacji) od wartości nominalnych, można jako cel sterowania postawić minimalizację następującego wskaźnika jakości

$$J = E \left\{ \underline{\sigma}^T(t_f) M \underline{\sigma}(t_f) + \int_0^{t_f} (\underline{\sigma}^T(t) \cdot P \underline{\sigma}(t) + \underline{u}^T(t) T \underline{u}(t)) dt \right\} \quad (14)$$

gdzie operacja uśredniania wynika z faktu, że przy modelu (12), (13) $\underline{\sigma}$, $\underline{u}$ są procesami losowymi.

Pierwszy składnik przyjętego wskaźnika jakości, wyraża odchyłkę rozkładu zanieczyszczeń w złożu w momencie zakończenia procesu filtracji, zaś całka wyraża „sumę” odchyłek rozkładu zanieczyszczeń i sterowań, od ich wartości nominalnych za cały cykl filtracji. Dla sformułowanego jak wyżej problemu sterowania statystycznie optymalnego jego rozwiązanie ma postać [7]:

$$\underline{u}(t) = S(t) \hat{\underline{\sigma}}(t|t)$$

$$S(t) = -T^{-1}B(t)K(t)$$

$$\frac{d}{dt} K(t) = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)T^{-1}B(t)K(t) - P_t K(t) = M \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\underline{\sigma}}(t|t) = A(t)\hat{\underline{\sigma}}(t|t) + B(t)\underline{u}(t) + W(t)(\underline{h}(t) - C(t)\hat{\underline{\sigma}}(t|t) - D(t)\underline{u}(t)); \quad (16)$$

$$\hat{\underline{\sigma}}(0|0) = 0$$

$$W(t) = L(t)C^T(t)R^{-1} \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} L(t|t) = A^T(t)L(t|t) + L(t|t)A(t) - L(t|t)C^T(t)R^{-1}C(t) \cdot L(t|t) + Q(t); \quad L(0|0) = 0 \quad (18)$$

Interpretując wyniki zawarte w powyższych wzorach widzimy, że sterowanie $\underline{u}(t)$ w chwili t jest liniową funkcją oceny $\hat{\underline{\sigma}}(t|t)$, rozkładu zanieczyszczeń w złożu w tej samej chwili. Macierz $S(t)$ określa wzmocnienie układu sterowania, a wyznaczana jest na podstawie równania (16). Równanie (17) pokazuje w jaki sposób może być wyznaczona ocena $\hat{\underline{\sigma}}(t|t)$ na podstawie pomiarów rozkładu ciśnień $\underline{h}(t)$.

Dyskusja możliwości realizacji przedstawionej koncepcji

Możliwość realizacji przedstawionej koncepcji uwarunkowana jest możliwością numerycznej realizacji algorytmu sterowania oraz zasadnością przyjętego modelu. Przy obecnym stanie rozwoju techniki mikroprocesorowej, realizacja algorytmu sterowania (15), (16), (17), (18) jest możliwa, nawet przy stosunkowo dużej (~ 10) liczbie składowych wektora $\underline{\sigma}$.

Weryfikacji wymaga przyjęty model, a w szczególności sposób wyznaczania oceny rozkładu $\hat{\underline{\sigma}}(t|t)$ na podstawie pomiaru rozkładu ciśnień $\underline{h}(t)$ w złożu. Prace realizujące uproszczoną wersję (metoda najmniejszych kwadratów), omawianej koncepcji przedstawiono w [8]. Podsumowując w pierwszej fazie realizacji algorytmu sterowania należało by zrealizować jedynie równania (17), (18). Uzyskany wynik w postaci oceny $\hat{\underline{\sigma}}(t)$ mógłby stanowić cenną informację dla operatora procesu, a nagromadzo-

ne doświadczenia pozwoliłyby na stwierdzenie czy zależy on „wystarczająco silnie” od postulowanych zmiennych sterujących. Dopiero po pozytywnym zakończeniu pierwszej fazy, można rozpocząć próby „zamknięcia” układu sterowania poprzez uwzględnienie zależności (15).

LITERATURA

1. K. M. WOJCIECHOWSKA: Filtry wielowarstwowe, analiza procesów filtracji i płukania w aspekcie potrzeb projektowych. Mat. Konf. Nauk. Techn. nt. „Intensyfikacja zaopatrzenia w wodę miast i osiedli”. Wisła 1985.
2. K. J. IVES: The physical and mathematical basis of deep bed filtration. J. Water No 51, 1967, s. 439—446.
3. D. M. MINC, W. R. KRISZTNI: Modelowanie procesu filtracji suspenzji przez zernistą słoć. Sbornik naučných robot AKCh wyp. 1, 1960.
4. T. R. CAMP: Theory of water filtration. J. San. Engrg. Div., ASCE, 90: SA 4:1, Aug. 1964, s. 28.
5. J. R. WILLSON, T. D. LEKKAS, G. T. FOX: Orthokinetic flocculation in deep bed granular water filters. J. AWWA, June 1980, s. 356—366.
6. S. S. MOHANKA: Multilayer filter design. J. Water and Water Engineering, April 1971, s. 143—150.
7. J. S. MEDITCH: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych. WNT W-wa 1975.
8. E. GROCHULSKA-SEGAL: Parametry hydrauliczne i technologiczne wielowarstwowych filtrów pospiesznych. Mat. Konf. Nauk. Techn. nt. „Zagadnienia zaop. w wodę miast i wsi”. Poznań 1984, s. 185—200.
9. B. D. ANDERSON, J. B. MOORE: Filtracja optymalna. WNT W-wa 1984.
10. M. L. MICHELSEN, J. VILLADSEN: A convenient computational procedure of collocation constants. Chem. Eng. J., t. 4, 1972, s. 64—68.
11. C. R. O'MELIA, D. K. GRAPPS: Some chemical aspects of rapid sand filtration. J. AWWA. Nov. 1964, s. 1326—1331.
12. W. E. STEWARD, J. R. SORENSEN: Transient reactor analysis by orthogonal collocation. Fifth European/Second International Symposium on Chemical Reaction Engineering, Amsterdam, s. B 8—75, 1972.

K.M. Wojciechowska

Control of pollutant accumulation in the course of the filtration process

The concept presented in this paper aims at controlling the distribution of pollutants accumulated in the filter bed. The model has been constructed by

making use of the classical physical model of filtration which is described by a set of partial differential equations. Nominal quantities of control and corresponding nominal quantities of the model are determined. After linearization around the nominal quantities, a linear model is obtained. Using the method of orthogonal approximation, the model is transformed to a set of ordinary differential equation and to a measuring equation.