

KOMPLEKSOWE OBLICZANIE HYDRAULICZNE UKŁADÓW ROZPROWADZANIA WODY

Zadanie hydraulicznego obliczania układów rozprowadzania wody polega na określeniu stanu hydraulicznego sieci oraz warunków współpracy pompowni zasilających i zbiorników z siecią przewodów i innych urządzeń wodociągowych. W celu formalnego zapisu tego zadania, powszechnie wykorzystywane są pojęcia z teorii grafów, które w sposób najbardziej intuicyjny odpowiadają pojęciom spotykanym w analizie układów sieciowych. Z tego też powodu, także w niniejszym artykule będziemy się posługiwać pojęciami zaczerpniętymi z teorii grafów [1].

Wracając do zadania, to należy uważać je za rozwiązane, gdy dokonany zostanie rozdział natężeń przepływów przez elementy sieci, w taki sposób, aby w każdym węźle spełnione było I prawo Kirchhoffa stanowiące warunek ciągłości przepływu

$$A_r^T \cdot q - R_r = 0 \quad (1)$$

Prawo to w pełni opisuje stan przepływów w sieciach o układach otwartych. W przypadku sieci o układach zamkniętych dla pełnego i jednoznacznego opisu stanu sieci konieczne jest spełnienie warunków zachowania energii w każdym niezależnym obwodzie sieci, sformułowane w postaci II prawa Kirchhoffa

$$B \cdot h = 0 \quad (2)$$

Podczas, gdy równania opisujące warunki ciągłości przepływu w każdym węźle sieci są równaniami liniowymi i nie sprawiają istotnych

problemów obliczeniowych, to równania opisujące zasadę zachowania energii w każdym obwodzie, będące algebraiczną sumą strat energii na elementach sieci są równaniami nieliniowymi i jako takie stanowią osobny problem natury obliczeniowej.

Do rozwiązywania zadania hydraulicznego obliczania układów rozprowadzania wody adaptowanych było, z różnym skutkiem, bardzo wiele metod.

Jedną z nich jest metoda Newtona, przybliżonego rozwiązywania układów równań nieliniowych. Zastosowanie tej metody do obliczeń hydraulicznych sieci sprawia, że układ równań nieliniowych w ilości równej ilości obwodów sieci „s” zostaje przetransformowany na układ „s” równań liniowych z „l” niewiadomymi, gdzie „l” jest ilością nieznanymi poprawek korygujących natężenia przepływów na każdym łuku sieci. Aby układ ten móc rozwiązać w sposób jednoznaczny należy go rozszerzyć o taką ilość równań, aby w konsekwencji otrzymać układ niezależnych równań z „l” niewiadomymi. Korzystając z zależności Eulera dla struktur grafu

$$s = l - w + 1 \quad (3)$$

można zauważyć, że aby powyższe żądanie zostało spełnione wystarczy układ „s” równań rozszerzyć o dalsze „w-1” równań. Taką właśnie ilość równań pozwala utworzyć I prawo Kirchhoffa.

Wspomniany układ równań można zapisać w następującej postaci macierzowej (4):

$$\begin{array}{|l|} \hline \text{„s” równań} \\ \text{z II prawa} \\ \text{Kirchhoffa} \\ \hline \text{„w-1” równań} \\ \text{z I prawa} \\ \text{Kirchhoffa} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|l|} \hline B^{s \cdot 1} \cdot K_{n-1}^{1 \cdot L} \\ \\ A^{w-1 \cdot 1} \\ \hline \end{array} \cdot Q_n^{1 \cdot 1} = \begin{array}{|l|} \hline B^{s \cdot 1} \cdot H_{n-1}^{1 \cdot 1} \\ \\ 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|l|} \hline \text{„s” składo-} \\ \text{wych} \\ \\ \text{„w-1”} \\ \text{składo-} \\ \text{wych} \\ \hline \end{array} \quad (4)$$

$K^{1 \cdot L}$ — macierz diagonalna stopnia l o wyrazach $k_{ii} = \frac{dh_i}{dq_i} \cdot q_{n-1}$

$H_{n-1}^{1 \cdot 1}$ — wektor spadków hydraulicznych dla (n-1)-wszej iteracji.

$Q_n^{1 \cdot 1}$ — wektor poprawek natężeń przepływu w łukach sieci. Rozwiązanie powyższego równania macierzowego polega na odwróceniu ma-

cierzy znajdującej się po lewej stronie równania i pomnożeniu jej przez wektor znajdujący się po prawej stronie równania. W rezultacie tych operacji otrzymuje się wektor poprawek korygujących natężenie przepływów na wszystkich łukach sieci.

Metoda Newtona gwarantuje dużą zbieżność procesu iteracyjnego. Nie powoduje jednak

globalnie oszczędności w czasie, ponieważ stosunkowo długotrwały jest proces budowania w każdej iteracji wspomnianej macierzy, a następnie jej odwracania. Mankamentem tej metody jest także duża zajętość obszaru pamięci maszyny cyfrowej.

Bardzo podobną do metody Newtona jest metoda Ilina-Kallinkina. Różnica polega jedynie na tym, że przed przystąpieniem do wyrównywania natężeń przepływów drogą rozwiązywania układu równań nieliniowych wynikających z II prawa Kirchhoffa, dokonuje się wstępnego rozdziału natężeń przepływów w łukach sieci w ten sposób, aby zostało spełnione I prawo Kirchhoffa. Zabieg ten sprawia, że każdy obwód sieci posiada jedną wartość poprawki korygującej, która w zależności od kierunku przepływu w łukach sieci w konkretnym obwodzie jest dodawana lub odejmowana do natężeń przepływu w tych łukach. W związku z tym równanie macierzowe występujące w metodzie Newtona zostanie zredukowane do postaci (5):

$$[B^{s-1} \cdot K_{n-1}^{-1-1} \cdot B^T]^{s-1} \cdot Q_n^{s-1} = [B^{s-1} \cdot H_{n-1}^{-1-1}]^{s-1} \quad (5)$$

Wprawdzie ulegnie zmniejszeniu ilość pamięci maszyny cyfrowej zajmowanej przez macierz po lewej stronie równania, lecz wzrośnie ilość koniecznych do wykonania operacji rachunkowych, które należy wykonać mnożąc iloczyn macierzy $B \cdot K$, występującej w równaniu macierzowym metody Newtona, przez macierz incydencji B . Tak więc metoda ta, choć w nieco mniejszej skali, posiada mankamenty metody Newtona.

Tej samej natury problemy spotykamy analizując także inne metody macierzowe, do których możemy zaliczyć metodę elementów skończonych czy metodę opartą dokładnie na idei Newtona lecz przy założeniu linearyzacji charakterystyk hydraulicznych urządzeń wodociągowych.

Po dokonaniu przeglądu dostępnych metod obliczeniowych wykorzystywanych przy hydraulicznym obliczaniu układów rozprowadzania wody, ostatecznie — autorzy wymienionego na wstępie opracowania, poświęcili uwagę metodzie Crossa-Łobaczewa. W metodzie tej można wyróżnić dwa etapy obliczeń. Wstępny wymaga założenia wartości natężeń przepływu q w taki sposób, aby spełnione było I prawo Kirchhoffa. Założone przepływy najczęściej nie spełniają warunków określonych w II prawie Kirchhoffa. Stąd konieczne jest, w drugim etapie, postępowanie polegające na obliczaniu poprawek korygujących natężenie przepływów, aż do momentu, kiedy suma zmian wysokości ciśnienia (energii) w każdym obwodzie osiągnie wartość zero z wymaganą tolerancją, a tym samym zasada ciągłości przepływów jak i zasada zachowania energii zostaną spełnione.

Charakterystyczną cechą tej metody jest to, że każdy z obwodów traktowany jest w sposób autonomiczny, tj. nie uwzględnia się bezpośrednio hydraulicznego sprzężenia z obwodami przylegającymi do rozpatrywanego. Sprzężenie to brane jest pod uwagę niejako z opóź-

nieniem. Polega ono na tym, że jeżeli dwa obwody j -ty oraz $(j+1)$ posiadają wspólny łuk, na którym występuje przepływ o natężeniu q , to po obliczeniu poprawki ΔQ_j dla j -tego obwodu, skorygowany przepływ na tym łuku przyjmie wartość $q' = q + \Delta Q_j \cdot \text{sign}(\Delta Q_j)$ i wartość ta jest przyjmowana za początkową wartość natężenia przepływu na owym łuku przed przystąpieniem do obliczania poprawki w $j+1$ -wszym obwodzie. Wspomniane „opóźnienie” jest przyczyną tego, że metoda jest zbieżna w sposób logarytmiczny. Znaczy to, że w miarę zbliżania się do rozwiązania końcowego, kolejne iteracje wnoszą coraz mniejsze wartości poprawek korygujących natężenie przepływów i proces obliczeniowy staje się powolniejszy.

Ta właściwość metody Crossa jest główną przeszkodą ograniczającą jej zastosowanie do hydraulicznego obliczania sieci, składających się z więcej niż 60 obwodów. Granica ta nie jest oczywiście precyzyjna, gdyż czasochłonność obliczeń w równej mierze zależy, zarówno od wielkości sieci jak i jej stabilności. Można bowiem zauważyć, że dłuższy jest proces obliczania obwodu, zawierającego zarówno średnice duże jak i małe od obliczania obwodu, zawierającego przewody o średnicach jednakowych lub mało różniących się. W tym sensie stabilnymi będziemy nazywać sieci zbudowane z przewodów o niewiele różniących się średnicach. Nie mniej konieczność przeprowadzania obliczeń dla sieci, składających się z dużej liczby obwodów, a takimi są praktycznie sieci wodociągowe wszystkich większych miast, była i jest przyczyną poszukiwania metod obliczeniowych, za pomocą których prowadzenie takich obliczeń będzie możliwe i to w realnym czasie.

Jedną z dróg poszukiwania jest tworzenie kolejnych modyfikacji samej metody Crossa, pozwalających na uzyskiwanie korzystniejszych efektów obliczeniowych. Otóż znacznie szybciej, jak już powyżej wspomniano, przebiega proces obliczania sieci stabilnych. W związku z tym, przed przystąpieniem do obliczeń tj. na etapie wyróżniania niezależnych obwodów, korzystnym okazuje się wybieranie tych obwodów w specjalny sposób, a nie przyjmowanie za obwody niezależne kolejnych oczek sieci.

Sposób ten polega na wyeliminowaniu w początkowym stadium obliczeń przewodów, które posiadają największe oporności, a co za tym idzie, najmniejsze średnice — jak gdyby odstających od wartości średniej. Algorytm takich odcinków sieci zaproponowali Korte i Vielhaber [2]. Przyjęli oni, że odcinki o największej oporności będą stanowiły kodrzewo grafu sieci i staną się odcinkami, na bazie których będą budowane niezależne obwody. Ponadto przy dokonywaniu wstępnego rozdziału natężeń przepływu wody w sieci, spełniającego I prawo Kirchhoffa, odcinki stanowiące kodrzewo są obciążone przepływami zerowymi. W konsekwencji odcinki z kodrzewa liczone są w kolejnych krokach iteracyjnych na przepływy, będące algebraiczną sumą wartości korekt natężeń, co powoduje, że straty hydra-

uliczne na tych odcinkach wprowadzone do wzoru Crossa nie dominują wartości poprawek w następnych iteracjach i nie powodują oscylacji wokół rozwiązania końcowego, co ma miejsce w przypadku sieci niestabilnych i jest tym samym przyczyną małej zbieżności obliczeń iteracyjnych.

Modyfikacja ta, choć w znakomitym stopniu poprawia skuteczność metody Crossa, nie wyczerpuje listy wszystkich możliwości usprawnień, jakie mogą być wprowadzone do procesu hydraulicznego obliczania sieci metodą poprawy natężeń przepływów.

I tak analizując zależność (6):

$$h = \frac{8 L \lambda}{\pi^2 D^5} q^2 \quad (6)$$

na podstawie której dla każdego odcinka sieci będącego przewodem o przekroju kołowym, oblicza się w każdej iteracji straty ciśnienia h w funkcji natężenia przepływu q , można zauważyć, że drugi zmienny parametr tej zależności, a mianowicie współczynnik oporów liniowych λ liczony ze wzoru Colebrooka-White'a

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{2,51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,71 \cdot D} \right] \quad (7)$$

gdzie liczba Reynoldsa Re liczona jest z zależności $\text{Re} = \frac{v \cdot D}{\nu}$ wymaga, ze względu na uwi-

kłany charakter wzoru, stosunkowo dużego nakładu czasu obliczeń, przy jego niewielkim wpływie na błąd w obliczaniu straty ciśnienia, jaki wyniknie, gdy założona zostanie stała wartość współczynnika λ równa tej, którą uzyskujemy po drugiej iteracji procesu obliczeniowego.

Dla przykładu możemy podać, że błąd bezwzględny popełniany w obliczeniach strat hydraulicznych w rurociągu o średnicy $D=250\text{ mm}$ i długości $L=1000\text{ m}$, wynosi co najmniej kilka centymetrów i jest rzędu błędów odczytu charakterystyk i parametrów elementów układu rozpraszania wody. Z drugiej strony proces obliczeniowy sieci składającej się z 330 łuków i 84 niezależnych obwodów wymagał 18-krotnego obliczania sieci. Widzimy więc, że przyjmując założenie o stałej wartości współczynnika, oszczędzamy czas jakiego wymagałoby $(18-3) \cdot 330 = 4950$ -krotnego obliczania wzoru Colebrooka-White'a. Odjęcie cyfry 3 od liczby iteracji wiąże się z tym, że na początku obliczeń wykonujemy 2 iteracje ze zmiennym współczynnikiem, a następnie po obliczeniu sieci ponawiamy jeszcze raz obliczenie ze współczynnikiem obliczonym dla ostatecznych natężeń przepływu.

Niemalży wpływ na czas obliczeń ma także sposób obliczania współczynnika λ ze wzoru Colebrooka-White'a. Wykorzystując wprost metodę podstawiania strony lewej wzoru, czyli $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ do prawej, każdorazowe obliczanie wartości λ wymagałoby wykonania kilkunastu iteracji. Natomiast wprowadzenie współczynników

wagowych, różnicujących wagę lewej i prawej strony wzoru Colebrooka-White'a, w stosunku $L/P=15/14$ redukuje ilość iteracji do 3.

Na skrócenie czasu obliczeń może wpłynąć fakt traktowania w metodzie Crossa każdego obwodu w sposób autonomiczny. Dzięki temu, jeżeli w trakcie obliczeń w niektórych obwodach II prawo Kirchhoffa zostało spełnione z zakładaną tolerancją, można te obwody pominąć w dalszych obliczeniach, przyjmując do dalszych obliczeń tylko pozostałe. Po obliczeniu w ten sposób całej sieci konieczne jest ponowne jej obliczenie w celu ostatecznego wyrównania natężeń przepływów, które mogły być zmienione w obwodach wcześniej wyrównanych na skutek wspomnianego na wstępie „opóźnionego” oddziaływania obwodów na siebie. We wszystkich przeliczonych przykładach wymagało to maksimum dwukrotnego obliczenia sieci.

Jeszcze lepsze rezultaty można uzyskać wprowadzając do obliczeń kilka granic dokładności wyrównywania przepływów, łącząc to oczywiście z omówioną powyżej ideą pomijania, w trakcie procesu obliczeniowego obwodów wyrównanych.

Wystarczające dla sieci zawierającej 200 oczek jest przyjęcie czterech granic dokładności dla etapów pośrednich i jednej dla etapu końcowego. Dobre rezultaty uzyskiwano przy założeniu następujących granic dokładności:

$$\varepsilon_1 = 3\text{ m}, \quad \varepsilon_2 = 0,5\text{ m}, \quad \varepsilon_3 = 0,25\text{ m}, \quad \varepsilon_4 = 0,2\text{ m}, \\ \varepsilon_k = 0,2\text{ m}.$$

Etap ostatni, na którym przyjmuje się dokładność obliczeń taką jak na etapie przedostatnim, różni się tym od poprzednich, że w każdym kroku iteracyjnym tego etapu wyrównywane są wszystkie obwody bez pomijania tych, które zostały wyrównane z założoną dokładnością ε_k . Ponadto w każdym kroku iteracyjnym tego etapu liczone są dla każdego przewodu zarówno liczba Reynoldsa Re jak i współczynnik oporów liniowych λ . Zmodyfikowana w powyżej opisywany sposób metoda Crossa, została wykorzystana w IOŚ Politechniki Wrocławskiej do zbudowania programu na EMC, pozwalającego na przeprowadzenie kompleksowej analizy hydraulicznej układów rozpraszania wody.

Program umożliwia wykonanie obliczeń układu rozpraszania wody, zbudowanego z „s” obwodów, „w” węzłów i „l” łuków w proporcjach określonych zależnością Eulera

$$s = l - w + 1$$

przy ograniczeniu ilości obwodów do 200, węzłów do 340 i łuków do 500.

Program może być wykorzystany do przeprowadzenia analizy hydraulicznej układów: jednostrefowych i wielostrefowych, przy czym mogą być one zasilane jednostronnie lub wielostronnie, zarówno przez pompownie jak i zbiorniki sieciowe.

Program pozwala na przeprowadzenie obliczeń hydraulicznych wymienionych układów dla

dowolnego rozbioru godzinowego przed doбором pomp jak i po ich doborze. Dzięki możliwości wprowadzenia zmian struktury sieci, cech jej elementów oraz warunków pracy program pozwala wykonać obliczenia dla dowolnej liczby wariantów tego samego układu podstawowego, przy jednoczesnym drukowaniu rezultatów obliczeń każdego wariantu.

Zmiany struktury układu podstawowego mogą obejmować:

- anulowanie dowolnych węzłów i łuków sieci pod warunkiem, że nie doprowadzi to do rozspójnienia grafu,
- rozbudowanie struktury podstawowej o nowe węzły i łuki.

Zmiany cech elementów sieci mogą obejmować, w przypadku:

- **przewodów rurowych:**
 - zmiany współczynnika chropowatości piaskowej, np. w wyniku starzenia się rurociągu i inkrustacji,
 - zmiany średnicy przewodu,
- **pompowni:**
 - zmiany charakterystyki pompy,
 - zmiany rzędnej zwierciadła wody w komorze czerpnej,
- **zbiorników:**
 - zmiany rzędnych zwierciadła wody,
- **innych urządzeń sieciowych:**
 - zmiany charakterystyk hydraulicznych tych urządzeń.

Zmiana warunków pracy może polegać na:

- przejściu z jednego stanu rozbioru godzinowego wody w sieci do dowolnego innego,

- zmianie rozbioru wody w wybranych węzłach,
- zmianie wydajności pomp w wariantach przed poborem pomp.

Tak szerokie możliwości generowania wariantów obliczeniowych, analizowanego układu zaopatrzenia w wodę pozwalają na:

- zasymulowanie stanu awarii dowolnego elementu układu, a więc przewodu, pompy, zbiornika i zbadanie wpływu tego elementu czy zespołu elementów na funkcjonowanie układu,
- prognozowanie stanu technicznego sieci i poszczególnych jej elementów,
- przeanalizowanie konkurencyjnych wariantów rozbudowy sieci,
- analizowanie możliwości etapowania rozbudowy układu z jednoczesnym określeniem zakresu wykonywania zadań inwestycyjnych na kolejnych etapach,
- przeanalizowanie poprawności zaprojektowanej sieci (np. przy pomocy programu OSW1 służącego do techniczno-ekonomicznego doboru średnic) oraz jej współpracy z pompowniami i zbiornikami sieciowymi.

LITERATURA

1. DEO NARSINGH: Teoria grafów i jej zastosowanie w technice i informatyce, W-wa 1980.
2. J. W. KORTHE, M. VIELHABER: Ein Beitrag zur elektronischen Berechnung von Wasserversorgungsnetzen, T. II, III, GWF, Wasser-Abwasser, nr 14, 24 — 1967.
3. E. MIELCARZEWICZ: Obliczenia systemów zaopatrzenia w wodę. Arkady. Warszawa 1977.
4. Raport Instytutu Inżynierii Ochrony Środowiska Politechniki Wrocławskiej nr 19/80. Modele matematyczne układów rozprowadzania wody..., Wrocław 1980.