

Krystyna Wojciechowska

## Numeryczna symulacja procesu filtracji wody w warunkach zmiennej prędkości filtracji

Filtracja wody przez wielowarstwowe złożo filtru pospiesznego, będąca podstawowym elementem technologii oczyszczania wody, jest złożonym procesem fizyczno-chemicznym. Modelowanie tego procesu wymaga wyróżnienia występujących w nim zjawisk fizycznych, wyboru skali opisu oraz zmiennych, odpowiednio do celu, w jakim budowany jest model, a także ustalenia relacji (równań) pomiędzy wybranymi zmiennymi.

Podstawowy model procesu filtracji pospiesznej, sformułowany w skali makroskopowej, wyraża (wykorzystując dodatkowe zmienne, traktowane jako parametry) relacje pomiędzy zmiennymi skutkowymi  $C(t,L)$ ,  $\sigma(t,L)$ ,  $h(t,L)$  i zmiennymi przyczynowymi  $v(t)$ ,  $C_0$ . Relacje te mają postać układu trzech równań, sformułowanych przez Ivesa, [12], Iwasakiego, [13], Campa, [4] i Cleasby'ego, [7,9]:

$$\frac{\partial C(t,L)}{\partial L} = -\lambda(\sigma(t,L), v(t))C(t,L) \quad (1)$$

z warunkiem brzegowym  $C(t,0)=C_0$ ,

$$\frac{\partial \sigma(t,L)}{\partial t} = -v(t) \frac{\partial C(t,L)}{\partial L} \quad (2)$$

z warunkiem początkowym  $\sigma(0,L)$ ,

$$\frac{\partial h(t,L)}{\partial L} = 1 - K(v(t))\sigma_0(t,L) - \frac{K_0 \mu v(t)(1-\epsilon_0)^2}{\rho g \epsilon_0^3 \Psi^2 d_s^2} \quad (3)$$

z warunkiem brzegowym  $h(t,0)=h_0$ .

Pierwsze równanie, zawierające parametr  $\lambda(\sigma(t,L), v(t))$ , nazywany współczynnikiem filtracji, opisuje usuwanie cząstek zanieczyszczeń z filtrowanej wody, drugie – bilans masy, a trzecie – rozkład ciśnienia w złożu filtracyjnym, przy założeniu addytywności składowych rozkładu, pochodzących odpowiednio od złoża czystego i zawartości odłożonych w nim zanieczyszczeń. W równaniach (2) i (3) podstawowym parametrem jest funkcja wyrażająca związek pomiędzy objętościową i masową zawartością zanieczyszczeń odłożonych w złożu.

W wypadku filtru wielowarstwowego, układ równań z odpowiednimi parametrami funkcyjnymi i liczbowymi, właściwymi dla danej warstwy, opisuje filtrację w każdej z warstw [16,17]. Układy równań odnoszące się do poszczególnych warstw powiązane są warunkami ciągłości (warunkami brzegowymi) dla przepływu, zawartości zanieczyszczeń i rozkładu ciśnienia.

Reasumując, podstawowy model procesu filtracji stanowią trzy równania o pochodnych cząstkowych służące do opisu funkcji  $C(t,L)$ ,  $\sigma(t,L)$ ,  $h(t,L)$  z argumentem ciągłym  $(t,L)$ , wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi. W równaniach tych występują trzy funkcje podstawowe odnoszące się do modelowania i symulacji procesu filtracji. Są nimi współczynnik filtracji, objętościowa zawartość odłożonych zanieczyszczeń w funkcji zawartości masowej oraz składowa rozkładu ciśnienia, zależna od zawartości odłożonych zanieczyszczeń.

Wśród wymienionych parametrów (funkcji) najbardziej istotne są dwa pierwsze, bowiem przez nie zachodzi interakcja pomiędzy dwoma pierwszymi równaniami modelu. Parametry (funkcje) te są w podejściu makroskopowym wynikiem uśrednienia oddziaływań mikroskopowych (w warunkach stanu nieustalonego) pomiędzy cząstkami zanieczyszczeń i ziarnami złoża oraz pomiędzy cząstkami. Funkcje te nie mają akceptowanych ogólnie postaci analitycznych, jak również proceduralnych, i stale prowadzone są w tym zakresie prace badawcze [1–3].

W niniejszej pracy przedstawiono – popartą symulacjami numerycznymi – propozycję nowego (uogólnionego) modelu współczynnika filtracji, będącego rozszerzeniem znanej postaci Ivesa, stosowanej w przypadku wolno zmiennej prędkości filtracji, nazywanego *quasi*-statycznym. Z tego względu odpowiednią uwagę poświęcono wpływowi prędkości filtracji na inne parametry modelu.

W większości przypadków – zależy to od obszaru określoności i postaci funkcji określających parametry – układ równań (1), (2) i (3) nie ma rozwiązania analitycznego, a zatem jego rozwiązanie otrzymuje się przez całkowanie numeryczne. Jak wykazały przeprowadzone w pracy badania, w wypadku rozpatrywanego układu równań, stabilny schemat numeryczny można uzyskać przez zastąpienie pochodnych cząstkowych dwupunktowymi różnicami na prostokątnej siatce w przestrzeni argumentów  $(t,L)$ . Dodatkowo, dzięki dyskretyzacji, nie jest wymagana analityczna postać współczynnika filtracji, jak również funkcji wiążącej objętościową i masową zawartość zanieczyszczeń odłożonych w złożu, wystarczy procedura wyznaczania wartości tych funkcji dla zadanych wartości argumentów. Przedziały dyskretyzacji  $(\Delta t, \Delta L)$  dla zmiennych  $t$  i  $L$  mają wpływ na wyniki symulacji [23–25], jednak ich właściwy wybór na podstawie przesłanek fizycznych nie nastęrcza problemu.

Przykładowo, dla czasu trwania cyklu filtracji 24 godz. i wysokości złoża 1,5 m, zadowolające wyniki symulacji otrzymuje się dla  $\Delta t=10$  min i  $\Delta L=2$  cm.

## Objętościowa i masowa zawartość zanieczyszczeń w złożu

Równanie bilansu masy wiąże zmianę zawartości zanieczyszczeń odłożonych w złożu względem czasu ze zmianą ich zawartości w filtrowanej wodzie względem głębokości złoża. Zawartość cząstek zanieczyszczeń w filtrowanej wodzie wyrażona jest w jednostkach masy na jednostkę objętości i w takich samych jednostkach należałoby w tym równaniu wyrazić zawartość cząstek odłożonych w złożu. Jednak w pozostałych równaniach, opisujących kinetykę filtracji (1) i rozkład ciśnień w złożu (3), wymagane jest operowanie objętościową zawartością odłożonych zanieczyszczeń, bowiem to ona wpływa na zmianę porowatości złoża, modyfikując kształty kanalików i właściwości ziaren złoża.

Możliwe są dwa podejścia: w pierwszym równanie bilansu (2) dotyczy masowej zawartości zanieczyszczeń, która na potrzeby równań (1) i (3) przeliczana jest na zawartość objętościową; w drugim w całym układzie równań występuje objętościowa zawartość zanieczyszczeń, zaś wzór przeliczający ją na zawartość masową włączony jest do równania (2). Funkcja określająca przeliczanie masowej zawartości zanieczyszczeń na objętościową stanowi ważny parametr modelu filtracji. Trudność w ustaleniu tej funkcji wynika z faktu, że ogólnie porowatość struktur tworzonych przez odkładające się w złożu cząstki zanieczyszczeń jest różna od zera i zależy od rodzaju cząstek, warunków fizyczno-chemicznych, w tym czasu trwania filtracji i prędkości filtracji. W pracy założono następującą postać zależności pomiędzy objętościową i masową zawartością zanieczyszczeń:

$$\sigma_o(t,L) = \frac{\sigma(t,L)}{\rho_s c_3 c_4(v(t))} \quad (4)$$

$$c_4(v(t)) = c_{4w}(v(t))^{1/2} \quad (5)$$

w której:

$\sigma(t,L)$  – masowa zawartość zanieczyszczeń odłożonych w złożu w chwili  $t$  (liczonej od momentu rozpoczęcia filtracji) i na głębokości  $L$  (liczonej od powierzchni złoża),  $g/m^3$

$\sigma_o(t,L)$  – objętościowa zawartość zanieczyszczeń, przy takim samym znaczeniu argumentów,  $g/m^3$

Przyjęta zależność uwzględnia zmiany prędkości filtracji. W przyjętej zależności występuje iloczyn współczynników  $c_3$  i  $c_{4w}$ . Do potrzeb symulacji współczynnik  $c_{4w}$  został arbitralnie przyjęty jako 0,2 1/m, natomiast wartość współczynnika  $c_3$  została ustalona w wyniku prób numerycznych przeprowadzonych na przedziale  $1,2 \cdot 10^{-3}$ – $6,3 \cdot 10^{-3}$ .

## Współczynnik filtracji

W kinetyce procesu filtracji najbardziej powszechny jest model, w którym skuteczność wychwytywania cząstek zanieczyszczeń z filtrowanej wody (zmiana ich zawartości na jednostkę głębokości złoża) jest proporcjonalna do zawartości tych cząstek w wodzie, przy czym współczynnik proporcjonalności nazywany jest współczynnikiem filtracji. Współczynnik filtracji jest zatem miarą skuteczności wychwytywania cząstek zanieczyszczeń i zależy od charakterystyki czystego złoża (rodzaj i średnica ziaren złoża), fizyczno-chemicznych właściwości filtrowanej wody (temperatura, pH) oraz od zawartości zanieczyszczeń odłożonych w złożu

i prędkości filtracji. Najbardziej popularny jest analityczny model współczynnika filtracji podany przez Ivesa w postaci:

$$\lambda = \lambda_o(v) \left( 1 + \frac{\beta \sigma_o(t,L)}{\epsilon_o} \right)^x \left( 1 - \frac{\sigma_o(t,L)}{\epsilon_o} \right)^y \left( 1 - \frac{\sigma(t,L)}{\sigma_u(v)} \right)^{z(v)} \quad (6)$$

wraz z zależnościami pomocniczymi:

$$\beta = \frac{a}{S^{0,65}} \quad (7)$$

$$\lambda_o = c_1 \frac{S^{1,35}}{v^{0,25}} \quad (8)$$

$$S = \frac{6(1 - \epsilon_o)}{\Psi ds} \quad (9)$$

w której:

$\sigma_u(v)$  – graniczna zawartość odłożonych cząstek zanieczyszczeń, to jest taka, dla której współczynnik filtracji jest równy zeru,  $g/m^3$

$\lambda_o(v(t))$  – współczynnik filtracji dla złoża czystego, 1/m

Przyjęty model współczynnika filtracji uwzględnia trzy typy procesów modyfikujących parametr  $\lambda$ , przy czym odpowiednie modyfikacje wyrażone są przez ujęte w nawiasy i liczone od lewej strony czynniki wzoru (6), natomiast wykładniki potęgowe  $x$ ,  $y$ ,  $z(v)$  ustalone zostały na podstawie badań eksperymentalnych.

W danych literaturowych dotyczących modeli współczynnika filtracji można znaleźć stosunkowo niewielką liczbę prac poświęconych analizie wpływu zmienności prędkości filtracji na wartość współczynnika filtracji [8, 10, 11]. Większość prac dąży do określenia zależności współczynnika filtracji w stanie ustalonym od jego wartości dla złoża czystego, warunków prowadzenia procesu filtracji, takich jak średnica cząstek złoża, wskaźniki jakości wody, prędkości filtracji i inne. W tym aspekcie zależność współczynnika filtracji od zawartości zanieczyszczeń odłożonych w złożu jest głównym obszarem badawczym [15, 21, 22]. Na tej podstawie do analizy i uogólnienia dokonanego w pracy wybrano wzór Ivesa, jako najbardziej reprezentatywny i jednocześnie najbardziej ogólny.

Inne – mikroskopowe – podejścia do budowy modelu współczynnika filtracji opierają się na technice nazywanej analizą trajektorii. Rozpatruje się w niej trajektorie pojedynczych cząstek zanieczyszczeń i określa prawdopodobieństwo wychwylenia ich na powierzchni ziarna, określane z analizy sił oddziałujących na cząstkę. Podobnie określa się prawdopodobieństwo oderwania się z powierzchni ziarna cząstki wcześniej wychwyconej. Istotnym postępowaniem w rozwoju tej techniki stało się założenie, że cząstki wychwycone na powierzchni ziarna mogą działać jako dodatkowe kolektory, zwiększając tym samym prawdopodobieństwo wychwylenia nowych cząstek [18]. Pozwoliło to między innymi na wyjaśnienie znanego z praktyki zjawiska wpracowywania filtru. Inne podejście, również mikroskopowe, polega na modelowaniu w postaci drzewa dendrytowego kanałów tworzących się pomiędzy ziarnami złoża, a następnie ich zatykaniu przez odkładające się cząstki zanieczyszczeń [5, 6, 20]. W dalszym rozwoju badań zauważono, że struktura odłożonych w złożu cząstek ma również pewną porowatość, zmieniającą się wraz z zawartością zanieczyszczeń i prędkością filtracji [6], podczas gdy we wcześniejszych pracach zakładano ich jednolitość. Podobnie,

dążąc do odwzorowania warunków fizycznych założono, że wielkości wychwytywanych cząstek mają pewien rozkład [14,19].

Należy podkreślić, że wszystkie opisane podejścia dążyły do uzyskania modelu współczynnika filtracji w postaci funkcji analitycznej oraz że we wszystkich podejściach brakuje jawnej analizy relacji pomiędzy modelem mikroskopowym a makroskopowym.

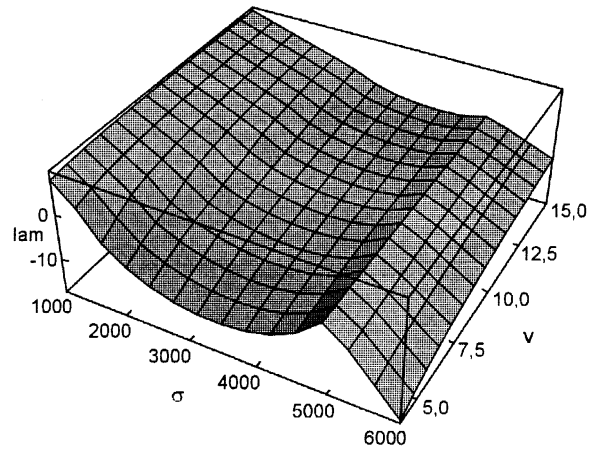
W niniejszej pracy przeprowadzono numeryczną analizę zależności częściowych, na podstawie której zaproponowano uogólnienie klasycznego modelu (6), na przypadek zmiennej prędkości filtracji. Istotą opracowanego uogólnienia jest możliwość wyznaczania współczynnika filtracji w przypadkach, w których użycie klasycznego wzoru nie jest możliwe, otrzymuje się bowiem z niego zespolone wartości współczynnika filtracji, jako konsekwencję wykonania operacji potęgowania z wykładnikiem ułamkowym na liczbach ujemnych. Prędkość filtracji występuje w kilku zależnościach składających się na współczynnik filtracji, jak również w zależności na objętościową zawartość zanieczyszczeń odłożonych w złożu. Ponieważ we wszystkich analizowanych zależnościach nie występuje jawnie dynamika zmiany prędkości filtracji (brak argumentów postaci  $dv/dt$ ), przyjęto że są one możliwe do wykorzystania jedynie dla wolnych zmian prędkości filtracji, takich, przy których dynamika może być pominięta i skupiono się na określeniu postaci współczynnika filtracji dla tych argumentów, dla których klasyczny wzór (6) daje wartości zespolone. Podejście takie można nazwać *quasi*-statycznym. Uogólnienie uzyskano rozpatrując niezależnie te czynniki modelu (6), które mogą przyjmować wartości ujemne.

### Numeryczna analiza współczynnika filtracji i wyniki symulacji na podstawie uogólnionego współczynnika filtracji

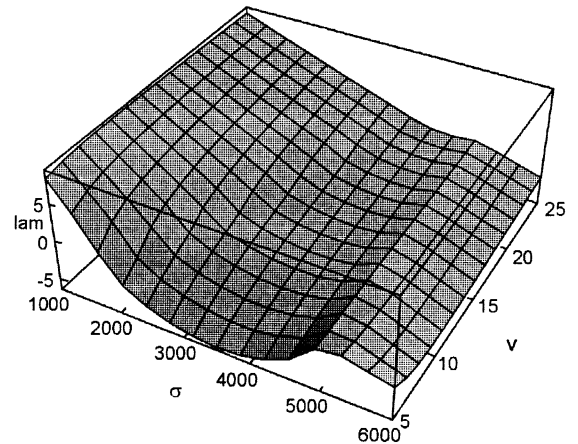
W analizie numerycznej każdy z czynników wyróżnionych we wzorze (6) rozpatrywany był niezależnie jako funkcja  $\sigma$  i  $v$ , a badana była jego zmienność względem parametrów liczbowych. Dla początkowego współczynnika filtracji przyjęto model o postaci (8), w której parametr  $S$  był określony przez wzór (9). W przeprowadzonych badaniach numerycznych zmieniana była wartość współczynnika  $c_1$  oraz wykładnika prędkości, w celu określenia wrażliwości początkowego współczynnika filtracji.

Dla wartości argumentów  $\sigma$  i  $v$ , dla których drugi i trzeci czynnik we wzorze (6) po wykonaniu potęgowania przyjmują wartości zespolone, zastępuje się je przez moduły liczb zespolonych, natomiast znak współczynnika (dodatni lub ujemny) określany jest oddzielnie. Wykres otrzymanego w ten sposób uogólnionego współczynnika filtracji przedstawia rysunek 1. Ponieważ do celów symulacji numerycznych tak określony uogólniony współczynnik filtracji nie jest korzystny, ze względu na występujące w nim warunki logiczne, dlatego zaproponowano również w celu przyspieszenia obliczeń wersję uproszczoną. W wypadku uproszczonego uogólnionego współczynnika filtracji wartość zespolona zastępowana jest przez jej część rzeczywistą, z zachowaniem znaku. Wykres tak określonego współczynnika filtracji przedstawia rysunek 2.

Jak widać z porównania rysunków 1 i 2, zachowany został charakter zmienności funkcji, co wydaje się wystarczające do potrzeb symulacji (w procesie strojenia modelu nastąpi dobór współczynnika skali). Zrealizowane badania numerycznie



Rys. 1. Uogólniony współczynnik filtracji jako funkcja zawartości zanieczyszczeń odłożonych w złożu ( $\sigma$ ) i prędkości filtracji ( $v$ ) dla  $\epsilon_0=0,38$ ,  $\rho_s=2,6 \cdot 10^6 \text{ g/m}^3$ ,  $\Psi=0,98$ ,  $d_s=1,0 \text{ mm}$ ,  $\sigma_u=5 \cdot 10^3 \text{ g/m}^3$ ,  $a=0,15$ ,  $c_{4w}=0,8$

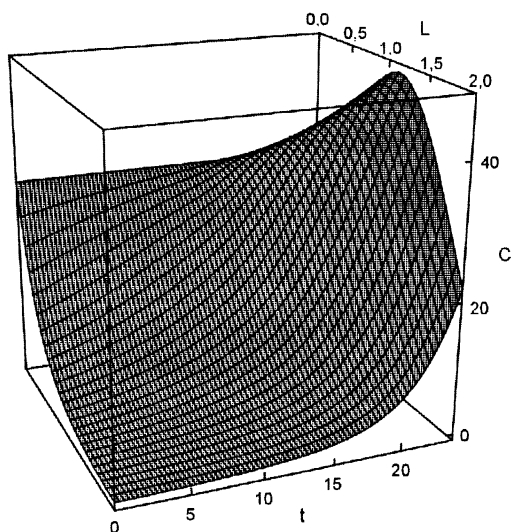


Rys. 2. Uproszczony współczynnik filtracji jako funkcja zawartości zanieczyszczeń odłożonych w złożu ( $\sigma$ ) i prędkości filtracji ( $v$ ) dla  $\epsilon_0=0,38$ ,  $\rho_s=2,6 \cdot 10^6 \text{ g/m}^3$ ,  $\Psi=0,98$ ,  $d_s=1,0 \text{ mm}$ ,  $\sigma_u=5 \cdot 10^3 \text{ g/m}^3$ ,  $a=0,15$ ,  $c_{4w}=0,8$

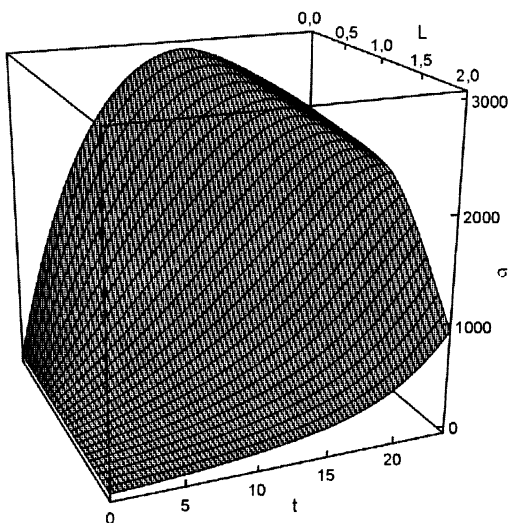
prowadzą do wniosku, że zależność współczynnika filtracji od podstawowych argumentów, którymi były masowa zawartość zanieczyszczeń odłożonych w złożu i prędkość filtracji, podobnie jak wrażliwość tego współczynnika na zmiany parametrów, była funkcją monotoniczną. Wydaje się, że do aproksymacji funkcji tego typu wystarczające są funkcje drugiego rzędu. Konsekwencje takiego rozumienia współczynnika filtracji można również zauważyć w literaturze. Przykładowo, w pracy [3] dla współczynnika filtracji, jako jedynie funkcji masowej zawartości zanieczyszczeń, zakłada się różne postacie wielomianów zmiennej. Jedynym kryterium jest jakość dopasowania wyniku symulacji do przyjętych danych porównawczych. W badaniach realizowanych w niniejszej pracy przeanalizowano dodatkowo zależność współczynnika filtracji od prędkości filtracji, jak również pokazano możliwość określenia współczynnika filtracji dla podobzarów zmiennych  $\sigma$  i  $v$ . Ma to zastosowanie w wypadku zmiennej prędkości filtracji i występowania ujemnych wartości współczynnika filtracji, gdzie może być on wyrażony przez funkcje obowiązujące tylko w zadanych obszarach.

Symulacje numeryczne zrealizowano dla złoża piaskowego o średnicy ziaren  $d_{sr}=1,0 \text{ mm}$ , dla 24-godzinnego cyklu filtracji, zawartości zanieczyszczeń w dopływie do filtra równej  $30 \text{ g/m}^3$ , wysokości warstwy filtracyjnej 2 m, wysokości warstwy wody nad złożem 1 m i prędkości filtracji zmieniającej

się liniowo w czasie cyklu filtracji w zakresie od 8 m/h do 4 m/h. W badaniach symulacyjnych wykorzystano opracowany uogólniony model współczynnika filtracji. Celem tych symulacji było również pokazanie, że możliwe jest uzyskanie zadowalających wyników symulacji dla znacznie prostszego modelu współczynnika filtracji (rys. 3–5).



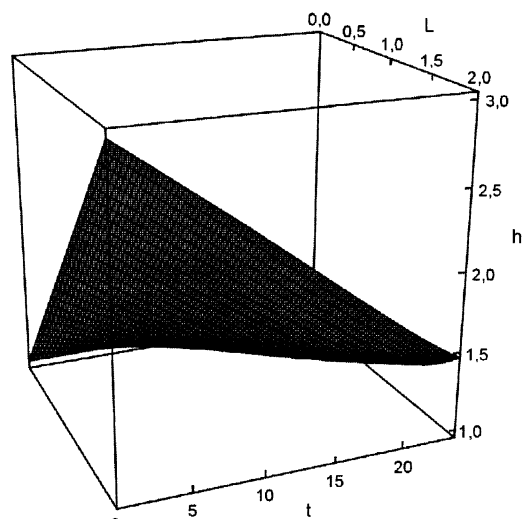
Rys. 3. Zawartość zanieczyszczeń w filtrowanej wodzie  $C(t, L)$  jako funkcja czasu ( $t$ ) i głębokości złoża ( $L$ ) dla zmiennej prędkości filtracji od 8 m/h do 4 m/h



Rys. 4. Zawartość zanieczyszczeń odłożonych w złożu  $\sigma(t, L)$  jako funkcja czasu ( $t$ ) i głębokości złoża ( $L$ ) dla zmiennej prędkości filtracji od 8 m/h do 4 m/h

### Ocena uzyskanych wyników

Jakość modelu filtracji oceniona została pośrednio na podstawie oceny wyników symulacji procesu filtracji zrealizowanych na podstawie modelu. Założono przy tym domyślnie, że procedury numeryczne wykorzystane przy realizacji symulacji nie wnoszą błędów, czyli że symulacja dokładnie odzwierciedla cechy modelu. W wypadku procesu filtracji zagadnienie błędów spowodowanych procedurami numerycznymi, a w szczególności wyborem przedziałów dyskretyzacji ( $\Delta t$ ,  $\Delta L$ ), czasu i zmiennej przestrzennej ( $L$ ), analizowane było w pracach [24, 25]. Również zagadnienie jakościowej oceny



Rys. 5. Ciśnienie w złożu  $h(t, L)$ , jako funkcja czasu ( $t$ ) i głębokości złoża ( $L$ ), dla zmiennej prędkości filtracji od 8 m/h do 4 m/h

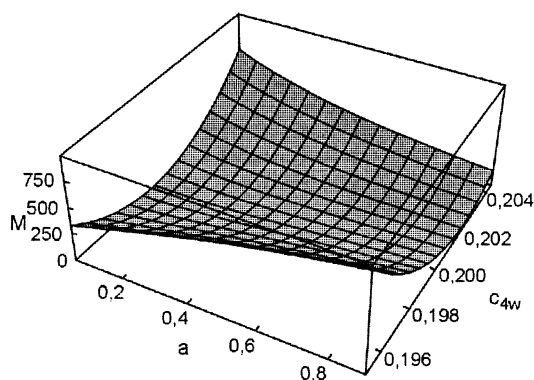
modelu, przez ocenę zrealizowanych na jego podstawie symulacji, było rozpatrywane w pracach [24–26].

Do potrzeb ilościowej oceny podobieństwa pomiędzy wynikami symulacji, reprezentowanymi przez funkcje  $C(t, L)$ ,  $\sigma(t, L)$  i  $h(t, L)$ , a danymi pomiarowymi, w postaci jednego z wymienionych wcześniej zestawów danych, zdefiniowano funkcję podobieństwa w postaci sumy kwadratów odchyłek pomiędzy wartością otrzymaną w wyniku symulacji a odpowiadającą jej wartością pomiarową, gdzie odpowiedność określona została przez równość argumentów. Przyjętą funkcję przedstawia następujący wzór:

$$\begin{aligned}
 M(p) = & \sum_{k=0}^{nt} \sum_{i=0}^{nL} (C(p, k, i) - C_p(k, i))^2 + \\
 & + w_{\sigma} \sum_{k=0}^{nt} \sum_{i=0}^{nL} (\delta(p, k, i) - \sigma_p(k, i))^2 + \\
 & + w_h \sum_{k=0}^{nt} \sum_{i=0}^{nL} (h(p, k, i) - h_p(k, i))^2
 \end{aligned} \quad (10)$$

w którym  $w_s$  i  $w_h$  są współczynnikami wag, z jakimi brane były pod uwagę podobieństwa pomiędzy odpowiednią funkcją, uzyskiwaną z symulacji dla wybranej wartości wektora parametrów ( $p$ ), a odpowiadającymi tej funkcji danymi pomiarowymi. Porównanie zostało wykonane w dyskretnych punktach przyjętej siatki. Mając zdefiniowaną funkcję podobieństwa można sformułować problem strojenia modelu procesu filtracji, jako minimalizację funkcji podobieństwa względem wybranych parametrów liczbowych modelu. Wybór parametrów przeznaczonych do strojenia, a w tym ich liczba, był wynikiem decyzji osoby tworzącej model. Przestankami do takiej decyzji mogą być jakościowe analizy wrażliwości. Jako przykład można podać graficzną analizę wrażliwości współczynnika filtracji na różne parametry liczbowe (rys. 3–5).

W przypadku opracowanego modelu procesu filtracji, jako parametry, za pomocą których wykonane zostało strojenie, wybrano dla  $c_{4w}$  wzór (5), natomiast dla  $a$  – wzór (7). Przykładową zależność funkcji podobieństwa od tych parametrów przedstawia rysunek 6.



Rys. 6. Funkcja podobieństwa  $M$  pomiędzy wartościami pomiarowymi  $C$  i  $h$  (w chwilach czasu 12 h, 18 h i 24 h, na głębokościach 0,1 m i 1,5 m, dla parametrów  $a=0,2$ ,  $c_{4w}=0,2$ ) a wynikami symulacji dla różnych wartości parametrów  $a$  oraz  $c_{4w}$

Przeprowadzone badania numeryczne wykazały, że poprawne wartości strojonych parametrów uzyskuje się dla każdego z zestawów pomiarowych. Jednak w wypadku, gdy w zestawie pomiarowym nie występuje zawartość zanieczyszczeń odłożonych w złożu filtracyjnym, funkcja podobieństwa ma minima lokalne i proces strojenia nie może być w pełni automatyczny, jeśli startuje z wartości parametrów znacznie odległych od optymalnych.

### Podsumowanie

Przedstawione w pracy numeryczne analizy zależności współczynnika filtracji od masy zawartości zanieczyszczeń odłożonych w złożu oraz prędkości filtracji pokazują istotę tych zależności pod kątem możliwości ich wykorzystania do symulacji, jak również pozwalają na ocenę wrażliwości wyników współczynnika filtracji od definiujących go parametrów liczbowych i funkcji pomocniczych. Przeprowadzone analizy pozwoliły na uogólnienie współczynnika filtracji na przypadek zmiennej prędkości filtracji, przy której zastosowanie jego klasycznej postaci nie jest możliwe.

Model filtracji, wraz z opracowanym uogólnionym współczynnikiem filtracji, umożliwia symulacje numeryczne procesu filtracji z wolnozmienną prędkością filtracji. Otrzymane wyniki wykazują zgodność jakościową z dostępnymi danymi pomiarowymi. Polega ona na występowaniu w wynikach symulacji zjawisk znanych z eksploatacji filtrów, takich jak przesuwanie się czoła filtracji i relokacja odłożonych zanieczyszczeń zachodząca podczas malejącej prędkości filtracji. W celu zapewnienia zgodności ilościowej zdefiniowano proces strojenie modelu, polegający na minimalizacji – względem wybranych parametrów – funkcji podobieństwa przyjętej w postaci kwadratowej funkcji błędu pomiędzy wynikami symulacji a danymi pomiarowymi. Opracowany model po nastrojeniu nadaje się do sterowania predykcyjnego procesem filtracji w zakładach oczyszczania wody pracujących ze zmienną prędkością filtracji.

### LITERATURA

1. W. ADAMSKI: Modelowanie systemów oczyszczania wód, PWN Warszawa 2002.
2. R. BAI, C. TIEN: Transient behavior of particle deposit in granular media under various surface interactions. *Colloids and Surfaces A*, 2000, 165, pp. 95–114.
3. R. BAI, C. TIEN: Effect of deposition in deep-bed filtration: Determination and search of rate parameters. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2000, 231, pp. 299–311.
4. T. P. CAMP: Theory of water filtration. *Journal San. Eng. Div. ASCE*, 1964, 90.
5. H. W. CHANG, C. TIEN: Dynamics of deep bed filtration. I. *AIChEJ*, 1985, 31, pp. 1349–1360.
6. C.-U. CHOO, C. TIEN: Analysis of the transient behaviour of deep bed filtration. *Journal Coll. Int. Sci.*, 1995, 169, pp. 13–33.
7. J. L. CLEASBY: *Water Filtration Through Deep Granular Media*. Public Works, 1970.
8. J. L. CLEASBY, Di BERNARDO: Hydraulics considerations in declining rate filtration. *Journal Env. Eng. Div. ASCE*, 1980, EE6.
9. J. L. CLEASBY: Filtration – back to the basics. In: *proc. AWWA Seminar Coagulation and Filtration: Back to the Basic*, 1981.
10. W. DĄBROWSKI, S. BURYS: A multimedia filter in numerical calculation. *Acta Hydrochimica et Hydrobiologica*, 1987, 15, 5, pp. 505–514.
11. W. DĄBROWSKI: Modelling declining rate filtration. *Symp. Proc. "Assessment, Disposal and Treatment of Rural Wastes"*, Kraków 1998.
12. K. I. IVES: The physical and mathematical basic of deep-bed filtration. *Journal Water*, 1957, 24.
13. T. IWASAKI: Some notes on sand filtration. *Journal AWWA*, 1937, 29, 1pp. 591–1602.
14. R. I. MACKIE, R. BAI, The role of particle size distribution in the performance and modelling of filtration. *Water Sci. Technol.*, 1993, 27, pp. 19–34.
15. D. M. MINC, W. R. KRISZTNI: Modelirowanie procesu filtracji suspenzji czerezy ziarnistej sioi. *Sbornik naucznych rabot AKCh*, 1960, 1.
16. S. S. MOHANKA: Theory of multilayer filtration. *Journal of Sanitary Eng. Div. ASCE*, 1969, 95.
17. S. S. MOHANKA: Multilayer filter design. *Journal Water and Water Engineering*, 1981, No. 4.
18. C. R. O'MELIA, W. ALI: The role of retained particles in deep filtration. *Prog. Water Technol.*, 1978, 10, 167–182.
19. D. G. STEVENSON: Flow and filtration through granular media: the effect of grain and particle size dispersion. *Water Res.*, 1997, Vol. 31, No. 2, pp. 310–322.
20. C. TIEN, A. C. PAYSTAKES: Advances in deep-bed filtration. *Journal AIChE*, 1979, 25, p. 737.
21. C. TIEN, R. M. TURIAN, H. PENDSE: Simulation of dynamic behaviour of deep bed filters. *Journal AIChE*, 1979, 25, p. 385.
22. K. M. YAO, M. T. HABIBIAN, C. R. O'MELIA: Water and wastewater filtration: Concepts and applications. *Environ. Sci. Technol.*, 1971, 5, pp. 1105–1112.
23. K. M. WOJCIECHOWSKA: Zastosowanie metod modelowania i symulacji do analizy efektywności procesu filtracji wody. *Ochrona Środowiska*, 2001, nr 4, ss. 13–18.
24. K. M. WOJCIECHOWSKA: Modelling and simulation of filtration in the development of water treatment technologies. *Engineering Transactions IPPT PAN*, 2002, 50, 4, pp. 323–357.
25. K. M. WOJCIECHOWSKA: Modelling and simulation of filtration process for designing and exploitation control of multilayer rapid filter. *IFAC Conference Technology, Automation and Control of Wastewater and Drinking Water Systems*, Gdańsk 2002, pp. 149–157.
26. K. M. WOJCIECHOWSKA: Symulacja procesu filtracji w filtrze pośpiesznym. *Inżynieria i Ochrona Środowiska*, Komitet Inżynierii Środowiska PAN, 2003, Vol. 6, No. 1.

**Wojciechowska, K. Numerical Simulation of the Multilayer Water Filtration Process for Variable Filtration Rate.** *Ochrona Środowiska* 2005, Vol. 27, No. 4, pp. 39–44.

**Abstract:** A generalization (supported by numerical simulations) of the modified Ives filtration coefficient model onto the case of variable filtration rate is proposed. Considering the variable filtration rate, special focus is on analysis, modeling and numerical simulation, as well as generalization of the filter coefficient onto the case of slowly variable rate of filtration. For numerical analysis, each factor of the filtration coefficient given by the Ives formulas is considered as a function of  $\sigma$  and  $v$  separately, and the behavior of the function and sensitivity with respect to the values of the parameters is tested. The values of the arguments  $\sigma$  and  $v$  for which the filtration coefficient determined by the Ives formulas is complex are substituted by

absolute values with proper sign. In the case of the simplified version, the complex value is substituted only by its real part. The simulation results for the concentration of particles in the filtered water, the concentration of the particles deposited in the bed, and the head loss in the bed are presented in the form of 3D plots for linearly decreasing and increasing rate of filtration and for the generalized coefficient of filtration. They are consistent in quality with the values obtained in the physical process and reflect phenomena as filling up of consecutive bed layers to their assumed accumulative capacity, shift of the filtration front and occurrence of negative pressure in the bed. The numerical model proposed may be used for the design of water treatment plants working with slowly variable filtration rates.

**Keywords:** Filtration, filtration coefficient, modeling, numerical simulation.