

Barbara Gładysz, Elżbieta Grochulska-Segal

Modelowanie zmian zawartości chlorków w wodzie w procesie infiltracji

Infiltracja jest procesem stosowanym zarówno w celu zwiększenia zasobów wód podziemnych, jak i do oczyszczania wód powierzchniowych. Polega ona na zasilaniu warstwy wodonośnej wodą powierzchniową, do czego najczęściej służą baseny infiltracyjne. Przykładem takiego rozwiązania jest ujęcie infiltracyjne w Legnicy (Przybków), stanowiące źródło danych do niniejszego opracowania.

W pracy zaprezentowano klasyczne modele ekonometryczne oraz modele autoregresyjne zmian zawartości chlorków w procesie infiltracji. Wybór jonów chlorkowych do modelowania zmian składu wody podczas infiltracji podyktowany był założeniem, że chlorki ulegają tylko procesowi dyspersji, natomiast czas opóźnienia transportowego dla tego wskaźnika jest miarą średniego czasu przetrzymania wody w układzie infiltracji [1].

Charakterystyka ujęcia

Ujęcie wody dla Legnicy zlokalizowane jest w pradolinie Kaczawy, zajmuje powierzchnię około 110 ha i stanowi rynną erozyjną wypełnioną czwartorzędowymi osadami zwirowopiaszczystymi. Miąższość osadów czwartorzędowych w obszarze ujęcia osiąga maksymalnie 15 m, poniżej których znajduje się warstwa trzeciorzędowych ilów. Ujęcie to związane jest z czwartorzędowym poziomem wodonośnym o zwierciadle w większości swobodnym i miąższości od kilku do dziesięciu metrów. Statyczne zwierciadło wody występuje od 1,0 m do 2,5 m poniżej powierzchni terenu i jest pod bezpośrednim wpływem Kaczawy.

Wydajność ujęcia znacznie przekracza zapotrzebowanie na wodę, zatem eksploatowana jest tylko część obiektów. Woda z rzeki doprowadzana jest grawitacyjnie kanałem otwartym do stawu pełniącego funkcję osadnika wstępnego. Z tego osadnika woda ponownie, za pośrednictwem kanału otwartego, trafia na stawy infiltracyjne, skąd po procesie infiltracji ujmowana jest za pomocą studni połączonych w ciągu lewarowe. Wydajność ujęcia wynosi obecnie około 30 tys m³/d. Stara część ujęcia, obejmująca stawy I, III i IV oraz studnię zbiorczą I, dostarcza 90% całkowitej wydajności ujęcia. W nowej części ujęcia eksploatowany jest lewar 1, staw VI oraz studnia zbiorcza II [2,3].

Dr inż. B. Gładysz: Politechnika Wrocławska, Instytut Organizacji i Zarządzania, Wybrzeże S. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
barbara.gladysz@pwr.wroc.pl

Dr inż. E. Grochulska-Segal: Politechnika Wrocławska, Instytut Inżynierii Ochrony Środowiska, Wybrzeże S. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
elzbieta.grochulska-segal@pwr.wroc.pl

Modele szeregów czasowych ARIMA

Budowa modeli ARIMA oparta jest na zjawisku autokorelacji, czyli na korelacji wartości zmiennej badanej (prognozowanej) z wartościami tej samej zmiennej z okresów wcześniejszych. Wyróżnia się trzy podstawowe rodzaje takich modeli, tj. modele autoregresji, modele średniej ruchomej oraz modele mieszane autoregresji i średniej ruchomej. Ogólna postać modeli ARIMA jest następująca [4]:

$$W_t = \mu + \frac{\theta(B)\Theta_s(B)}{\phi(B)\Phi_s(B)}e_t \quad (1)$$

w której:

W_t – dane lub różnice szeregu czasowego

μ – średnia

B – operator cofania

$\theta(B)$ – niesezonowy operator średniej ruchomej

$\phi(B)$ – niesezonowy operator autoregresji

$\Theta_s(B)$ – sezonowy operator średniej ruchomej

$\Phi_s(B)$ – sezonowy operator autoregresji

e_t – składnik losowy

s – długość okresu

Do zapisu tych modeli stosuje się także następujące oznaczenia, które zastosowano w niniejszej pracy:

– ARIMA(p,d,q)×(P,D,Q) dla szeregów czasowych sezonowych oraz:

– ARIMA(p,d,q) dla szeregów czasowych niesezonowych, w których:

p – rząd niesezonowej autoregresji

d – rząd niesezonowego różnicowania

q – rząd niesezonowej średniej ruchomej

P – rząd sezonowej autoregresji

D – rząd sezonowego różnicowania

Q – rząd sezonowej średniej ruchomej

Szeregi czasowe zawartości chlorków w wodzie do budowy modeli autoregresyjnych i średniej ruchomej pochodziły z lat 2000–2003 (200 obserwacji) [5]. Pomiar zawartości chlorków były wykonywane co 7 dób. Dane oraz wyniki estymacji modeli przedstawiono w tabelach 1 i 2 oraz na rysunkach 1 i 2.

Poziom zawartość chlorków w wodzie ze studni zbiorczej II dobrze opisywał model ARIMA(3,2,1), tym samym zawartość chlorków w danej chwili zależała od ich zawartości w okresach poprzedzających, zgodnie z zależnością:

$$[Cl^-]_t = 1,499438[Cl^-]_{t-1} - 0,3446[Cl^-]_{t-2} + -0,05406[Cl^-]_{t-3} + 0,14415[Cl^-]_{t-4} + -0,24494[Cl^-]_{t-5} + 0,982604e_{t-1} + e_t \quad (2)$$

Tabela 1. Estymacja zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej II (model ARIMA(3,2,1))

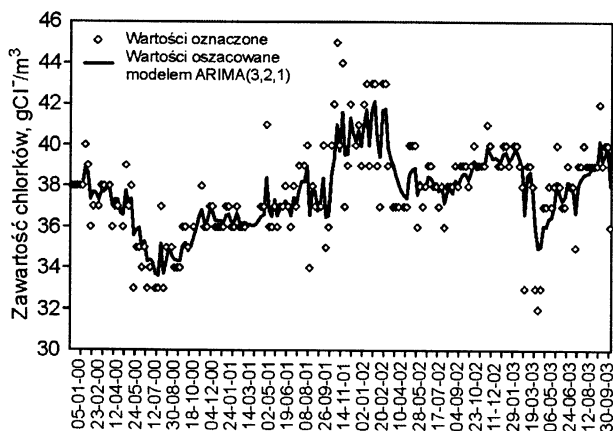
Parametr	Wartość estymatora	Dyspersja	Wartość statystyki testowej tStudenta (t_e)	Prawdopodobieństwo $P(t \geq t_e)$
$\varphi(1) - AR(1)$	-0,500562	0,0704336	-7,10687	0,000000
$\varphi(1) - AR(2)$	-0,34572	0,0752672	-4,59324	0,000008
$\varphi(3) - AR(3)$	-0,244935	0,0704888	-3,47481	0,000630
$\theta(1) - MA(1)$	0,982604	0,000985366	997,197	0,000000

Wariancja białego szumu $MSE=3,15257 (gCl/m^3)^2$ z 195 stopniami swobody; dyspersja białego szumu $\sqrt{MSE}=1,77555 gCl/m^3$
 średni absolutny błąd modelu $MAE=1,23499 gCl/m^3$; średni błąd modelu $ME=0,0822605 gCl/m^3$

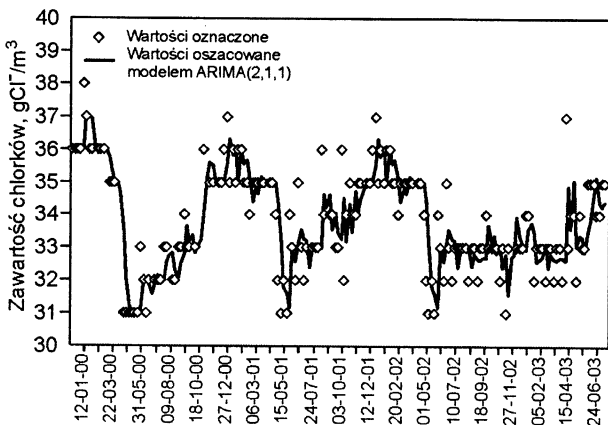
Tabela 2. Estymacja zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej I (model ARIMA(2,1,1))

Parametr	Wartość estymatora	Dyspersja	Wartość statystyki testowej tStudenta (t_e)	Prawdopodobieństwo $P(t \geq t_e)$
$\varphi(1) - AR(1)$	-0,932346	0,172795	5,39569	-0,000000
$\varphi(2) - AR(2)$	-0,448756	0,077372	-5,79994	0,000000
$\theta(1) - MA(1)$	-0,476733	0,189243	-2,51916	0,012567

Wariancja białego szumu $MSE=1,04476 (gCl/m^3)^2$ z 195 stopniami swobody; dyspersja białego szumu $\sqrt{MSE}=1,02213 gCl/m^3$
 średni absolutny błąd modelu $MAE=0,721869 gCl/m^3$; średni błąd modelu $ME=-0,000576422 gCl/m^3$



Rys. 1. Szereg czasowy zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej II oraz jego oszacowanie modelem ARIMA(3,2,1)



Rys. 2. Szereg czasowy zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej I oraz jego oszacowanie modelem ARIMA(2,1,1)

Dyspersja białego szumu (pierwiastek średniego kwadratowego błędu modelu – \sqrt{MSE}) wynosił $1,72 gCl/m^3$, średni bezwzględny błąd $MAE=1,32 gCl/m^3$ oraz średni błąd $ME=0,08 gCl/m^3$. Stacjonarność, losowość, homeoskedastyczność oraz brak autokorelacji składników losowych modelu zweryfikowano na poziomie istotności $\alpha=0,1$. Zastosowano testy liczby serii, autokorelacji Boxa-Pierce'a oraz testy równości wartości oczekiwanej i równości wariacji przy podziale obserwacji na dwie równe części.

Do opisu zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej I wyestymowano model ARIMA(2,1,1). W tym wypadku model opisujący zawartość chlorków w wodzie ze studni

infiltracyjnej w danej chwili od ich zawartości w okresie poprzedzających był następujący:

$$[Cl^-]_t = 0,067654[Cl^-]_{t-1} + 0,483596[Cl^-]_{t-2} + 0,448756[Cl^-]_{t-3} - 0,47673e_{t-1} + e_t \quad (3)$$

Dyspersja białego szumu (pierwiastek średniego kwadratowego błędu modelu – \sqrt{MSE}) wynosił $1,022 gCl/m^3$, średni bezwzględny błąd $MAE=0,72 gCl/m^3$ oraz średni błąd $ME=0,08 gCl/m^3$. Podobnie jak w wypadku zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej II, stacjonarność, losowość, homeoskedastyczność oraz brak autokorelacji składników losowych zweryfikowano na poziomie istotności $\alpha=0,1$.

Liniowy model ekonometryczny zawartości chlorków w wodzie infiltracyjnej

Liniowy model ekonometryczny jest modelem opisującym zależność pomiędzy wartościami zmiennej objaśnianej a wartościami zmiennych objaśniających. Ogólna postać jednorównaniowego liniowego modelu ekonometrycznego jest następująca [6,7]:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k + e \quad (4)$$

w której:

Y – zmienna objaśniana

X_1, X_2, \dots, X_n – zmienne objaśniające

e – składnik losowy

Dane do konstrukcji modelu regresji pochodziły z lat 1997–2003 (30 obserwacji). Tak mała liczba danych wynikała z częstości (najczęściej kwartalnej) pomiarów zawartości chlorków w wodzie z Kaczawy. Za zmienne objaśniające zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej I przyjęto zawartość chlorków w wodzie z Kaczawy [5] we wcześniejszych okresach (od jednego do ośmiu tygodni) oraz średnią wysokość opadów na tym terenie [8] (rys. 3 i 4).

Modele regresji skonstruowano dla różnego opóźnienia zmiennych objaśniających zawartość chlorków w wodzie z Kaczawy. Najlepsze dopasowanie modelu do danych rzeczywistych otrzymano dla opóźnienia sześciotygodniowego. Wyniki estymacji przedstawiono w tabeli 3 oraz na rysunku 5.

Model regresji miał zatem następującą postać:

$$[Cl^-]_{t(st. zb.)} = 25,6606 + 0,328145[Cl^-]_{t-6(Kaczawa)} - 0,0160393[opad]_{t-6} + e_t \quad (5)$$

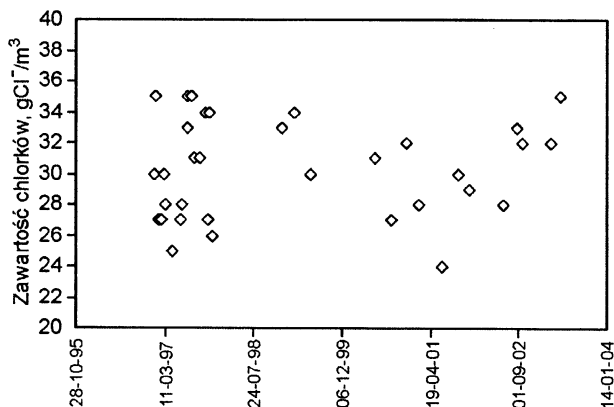
Tabela 3. Analiza zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej I (model regresji liniowej)

Parametr	Wartość estymatora	Dyspersja	Wartość statystyki testowej tStudenta (t_e)	Prawdopodobieństwo $P(t \geq t_e)$
α_0 – stała	25,6606	2,68109	9,57097	0,0000
α_1 – [opad] _{t-6}	-0,016039	0,00617967	-2,5955	0,0151
α_2 – [Cl ⁻] _{t-6} (Kaczawa)	0,328145	0,080068	4,09833	0,0003

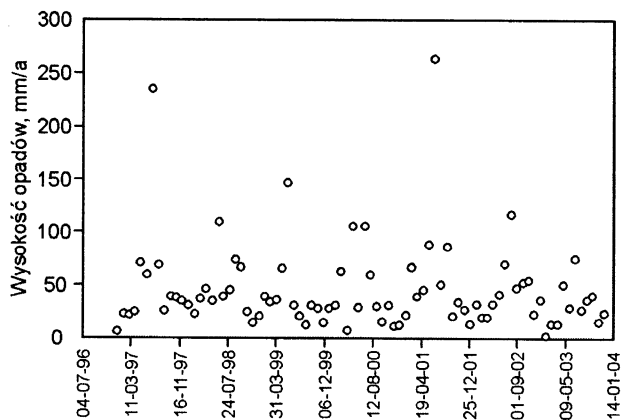
Analiza wariancji

Źródło	Suma kwadratów	Stopnie swobody	Średnie odchylenie kwadratowe	Wartość statystyki testowej FSnedecora (F_e)	Prawdopodobieństwo $P(F \geq F_e)$
Model	86,7957	2	43,3978	22,58	0,0000
Reszty	51,9043	27	1,92238	-	-
Ogółem	138,7	29	-	-	-

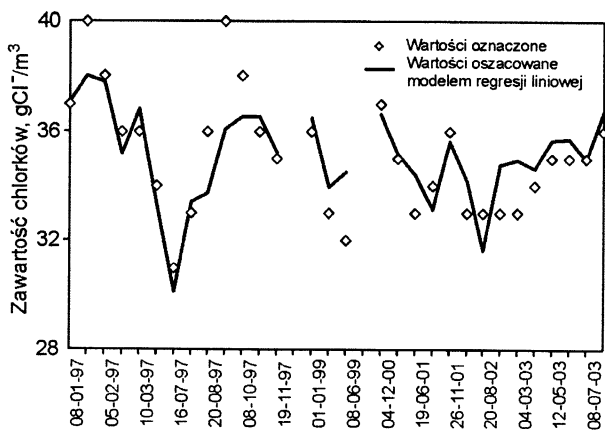
$R^2=0,62578$; R^2 (skorygowany)=0,59806; dyspersja błędu losowego $\sqrt{MSE}=1,3865$ gCl⁻/m³; średni absolutny błąd modelu MAE=1,01077 gCl⁻/m³



Rys. 3. Zawartość chlorków w wodzie z Kaczawy [5]



Rys. 4. Wysokość opadów na terenie Legnicy [8]



Rys. 5. Zawartość chlorków w wodzie ze studni zbiorczej I oraz jej oszacowanie modelem regresji liniowej

Model ten miał właściwość koincydencji. Zmienne objaśniające nie wykazywały współliniowości. Współczynnik determinacji modelu wynosił $R^2=0,62578$, a zatem model wyjaśniał 63% zmienności zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej I. Dyspersja błędu losowego (pierwiastek średniego kwadratowego błędu losowego modelu – \sqrt{MSE}) wynosiła 1,39 gCl⁻/m³, zaś średni bezwzględny błąd MAE=1,01 gCl⁻/m³. Właściwości składników losowych modelu zweryfikowano na poziomie istotności $\alpha=0,05$. Zastosowano testy Shapiro-Wilka (normalność), Durбина (brak autokorelacji), Goldfelda-Quandt (heteroskedastyczność) oraz liczby serii (losowość). Zweryfikowano też brak współliniowości zmiennych objaśniających modelu. Taka postać zależności wskazuje, że na zawartość chlorków w wodzie ze studni zbiorczej I istotny wpływ miała zawartość chlorków w wodzie z Kaczawy sześć tygodni wcześniej, a także wysokość opadów. Można zatem przyjąć, że opóźnienie transportowe chlorków w studni zbiorczej I wynosiło około 42 dób.

Prognoza zawartości chlorków w wodzie infiltracyjnej

W oparciu o skonstruowane modele zbudowano prognozy zawartości chlorków dla okresu sierpień–październik 2003 r. Prognozy oraz błędy prognoz przedstawiono w tabelach 4, 5 i 6.

W oparciu o model regresji zbudowano mniej prognoz, z uwagi na małą częstość obserwacji zawartości chlorków w wodzie z Kaczawy. Wszystkie modele sprawdziły się w procesie prognozowania. Średnie błędy bezwzględne prognozy *a priori* wynosiły 0,5+1,0 gCl⁻/m³, średnie błędy względne 1,0+2,6%, natomiast błędy maksymalne – 1+3 gCl⁻/m³.

Podsumowanie

Zawartość chlorków w studniach zbiorczych (I i II) ujęcia infiltracyjnego w Legnicy opisano przy pomocy modeli szeregów czasowych ARIMA. Skonstruowano również model regresji liniowej zawartości chlorków w studni zbiorczej I w zależności od zawartości chlorków w wodzie z Kaczawy oraz od wysokości opadów atmosferycznych. Dla studni zbiorczej II próby konstrukcji takiego modelu nie powiodły się.

Z postaci modelu regresji zawartości chlorków w wodzie po infiltracji można wnioskować, że opóźnienie transportowe chlorków wynosi około 42 doby. Podobną wartość opóźnienia transportowego chlorków (ok. 39 dób) otrzymano w pracy [1], porównując harmoniki zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej I w wodzie z Kaczawy.

Tabela 4. Prognoza zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej II (model ARIMA(3,2,1))

Data	Chlorki gCl ⁻ /m ³	Prognoza gCl ⁻ /m ³	Błąd gCl ⁻ /m ³	Błąd bezwzględny gCl ⁻ /m ³	Błąd względny
19-08-2003	40	38,54	1	1,46	0,04
26-08-2003	39	38,48	1	0,52	0,01
02-09-2003	39	38,63	0	0,37	0,01
09-09-2003	39	38,64	0	0,36	0,01
15-09-2003	39	38,92	0	0,08	0,00
23-09-2003	39	38,88	0	0,12	0,00
30-09-2003	42	38,94	3	3,06	0,08
07-10-2003	39	40,27	-1	1,27	0,03
14-10-2003	40	39,28	1	0,72	0,02
22-10-2003	40	39,52	0	0,48	0,01
Średni błąd prognozy				0,84	0,021

Tabela 5. Prognoza zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej I (model ARIMA(2,1,1))

Data	Chlorki gCl ⁻ /m ³	Prognoza gCl ⁻ /m ³	Błąd gCl ⁻ /m ³	Błąd bezwzględny gCl ⁻ /m ³	Błąd względny
19-08-2003	35	34,87	0	0	0,00
26-08-2003	35	35,07	0	0	0,00
02-08-2003	37	34,96	2	2	0,06
09-09-2003	37	36,10	1	1	0,02
15-09-2003	35	36,58	-2	2	0,04
23-09-2003	37	36,14	1	1	0,02
30-09-2003	38	36,38	2	2	0,04
07-10-2003	36	36,93	-1	1	0,03
14-10-2003	36	37,00	-1	1	0,03
22-10-2003	36	36,44	0	0	0,01
Średni błąd prognozy				1	0,026

Tabela 6. Prognoza zawartości chlorków w wodzie ze studni zbiorczej I (model regresji liniowej)

Data	Chlorki gCl ⁻ /m ³	Prognoza gCl ⁻ /m ³	Błąd gCl ⁻ /m ³	Błąd bezwzględny gCl ⁻ /m ³	Błąd względny
19-08-2003	35	34,99	0	0	0,00
08-10-2003	36	36,77	-1	1	0,02
Średni błąd prognozy				0,5	0,01

LITERATURA

1. J. ŁOMOTOWSKI: Infiltracja jako proces w technologii wody. Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej we Wrocławiu, rozprawa habilitacyjna nr 124, Wrocław 1994.
2. Praca zbiorowa: Wodociągi i kanalizacja w Polsce. Polska Fundacja Ochrony Zasobów Wodnych, Poznań–Bydgoszcz 2002.
3. E. M. GROCHULSKA-SEGAL, A. L. KOWAL, M. M. SOZAŃSKI: Modelowanie i optymalizacja wybranych procesów w systemach technologicznych uzdatniania wody. Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Ochrony Środowiska Politechniki Wrocławskiej, Seria Monografie nr 20, Wrocław 1985.
4. G. E. P. BOX, G. M. JENKINS: Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie. PWN, Warszawa 1983.
5. Materiały źródłowe Legnickiego Przedsiębiorstwa Wodociągów i Kanalizacji w Legnicy (prace nie publikowane).
6. A. WELFE: Ekonometria. PWE, Warszawa 1998.
7. B. GŁADYSZ, J. MERCIK: Modelowanie ekonometryczne. Studium przypadku. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004.
8. Materiały źródłowe Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej (prace nie publikowane).

Gładysz, B., Grochulska-Segal, E. Modeling Chloride Concentration Variations in Water in the Infiltration Process. *Ochrona Środowiska* 2005, Vol. 27., No. 2, pp. 45–48.

Abstract: Variations in the concentration of chlorides observed in the infiltration process were modeled for the infiltration water intake for the Water Treatment Plant of Legnica. For this purpose, ARIMA time series models for the chlorides contained in the infiltration water were constructed. A regression equation was derived to describe the concentration of chlorides in the

infiltration water and relate it to the following two factors: the concentration of chlorides in the Kaczawa River and the intensity of precipitation in this area. The form of the regression equation implies that the transport delay for the chlorides to the intake wells approaches 42 days. The models presented in this paper were used to predict the chloride concentration in the infiltration water.

Keywords: Infiltration, chlorides, modeling, ARIMA model, nonlinear regression model.