

MODELE MATEMATYCZNE ZWIĄZANE Z PROCESAMI EUTROFIZACJI JEZIOR

W artykule omówiona została grupa modeli stosowanych we współczesnej limnologii przy badaniu procesów eutrofizacji. Przedstawione w artykule modele podzielone zostały na dwie grupy. Do grupy pierwszej zaliczono modele przemian fosforu, omówione na przykładzie najbardziej znanego modelu — modelu Vollenweidera oraz modeli Imbodena i O'Melii. Za pomocą tej grupy można dokonać podziału jezior ze względu na stopień eutrofizacji. Do drugiej grupy zaliczono wielowymiarowe modele bioprodukcji pozwalające w sposób bardziej szczegółowy określić wpływ innych oprócz fosforu czynników takich jak stężenie azotu mineralnego, temperatura wody, natężenie promieniowania słonecznego na rozwój organizmów żywych i tym sposobem determinujących stopień eutrofizacji jeziora. W przypadku modeli tej grupy podano ogólną strukturę budowy.

Modele przemian fosforu

W 1969 r. R. Vollenweider w artykule [1] przedstawił swoją koncepcję przemian fosforu całkowitego w jeziorze. Koncepcja została rozwinięta w następnych pracach [2, 3], stała się również podstawą prac Dillona i Riglera [4, 5], Merciera [6], w których dokonano modyfikacji modelu. Złożenia Vollenweidera są następujące:

- 1) jezioro jest nieuwarstwionym dobrze wymieszonym zbiornikiem,
- 2) dopływ fosforu z zewnątrz jest stały,
- 3) zmiany masy fosforu w jeziorze spowodowane są dopływem, odpływem oraz sedymentacją fosforu proporcjonalną do ilości fosforu w jeziorze,
- 4) ilość fosforu w jeziorze dąży do stanu równowagi dynamicznej (stanu stacjonarnego).

Z powyższych założeń otrzymuje się równanie różniczkowe opisujące dynamikę przemian fosforu:

$$V \frac{dP}{dt} = J - \sigma PV - QP \quad (1)$$

gdzie:

- P — stężenie fosforu całkowitego w jeziorze (mg/m^3),
- J — ilość fosforu dopływającego do jeziora (mg/rok),
- Q — roczny odpływ wody (m^3/rok),
- V — objętość jeziora (m^3),
- σ — współczynnik sedymentacji ($1/\text{rok}$).

Stacjonarne rozwiązanie równania 1 określające stężenie fosforu w stanie równowagi dynamicznej jest następujące:

$$P = \frac{L}{Z(\sigma + e)} \quad (2)$$

gdzie:

- $L = \frac{J}{A}$ — obciążenie powierzchniowe jeziora ($\text{mg}/\text{m}^2/\text{rok}$),
- A — powierzchnia jeziora (m^2),
- $Z = \frac{V}{A}$ — średnia głębokość jeziora (m),
- $e = \frac{Q}{V}$ — współczynnik wymiany wody ($1/\text{rok}$).

Model weryfikował Vollenweider porównując masę osadów grupy jezior szwajcarskich ze wskazaniami przekształconej wersji równania (2). Określone zostały zależności pomiędzy σ a parametrami hydro-morfometrycznymi jeziora:

$$\sigma = \frac{10}{Z}, \quad [3]$$

$$\sigma = \sqrt{e}, \quad [3], [6]$$

$$\sigma = \frac{R}{1-R}, \quad [7]$$

gdzie:

$$R = \frac{J-0}{J} \text{ — współczynnik retencji fosforu,}$$

O — ilość fosforu odpływającego z jeziora (mg/rok).

Podobnie jak dla σ istnieje szereg zależności pomiędzy R, a łatwiejszymi do wyznaczenia parametrami:

$$R = 0,78 - 0,121 | \eta q_s, \quad [7],$$

$$R = \frac{1}{1 + \sqrt{\rho}}, \quad [6],$$

gdzie:

$q_s = \frac{Q}{A}$ — obciążenie hydrauliczne (m/rok).

Prostota i duża adekwatność modelu Vollenweidera sprawiły, że stał się on podstawą dla wielu zastosowań natury teoretycznej i praktycznej [5, 8, 9, 10]. Główny nurt zastosowań, zapoczątkowany przez samego Vollenweidera dotyczy

określenia stopnia zeutrofizowania jezior w zależności od masy dopływającego fosforu, wyrażonej w postaci obciążenia powierzchniowego L. Punktem wyjścia stały się następujące tezy: głównym czynnikiem determinującym stopień eutrofizacji jest stężenie fosforu całkowitego w jeziorze, wyróżnia się trzy typy jezior (trzy stopnie zeutrofizowania) i odpowiadające podziałowi wartości graniczne stężeń fosforu całkowitego:

jeziora oligotroficzne $P < 10$
 jeziora mezotroficzne $10 \leq P < 20$
 jeziora eutroficzne $P \geq 20$

(stężenie fosforu całkowitego P mierzone w mg^3)

Korzystając z (2) otrzymujemy wyrażenie określające wartość granicznego obciążenia powierzchniowego fosforem dla jezior danej grupy. Koncepcja wielowymiarowych modeli przemian fosforu rozwinięta została niezależnie przez D.M. Imbodena [11, 12] i C.R. O'Melia [13, 14]. Założenia modeli tego typu są następujące:

- 1) jezioro potraktowane jest jako dwuwarstwowy zbiornik, w którym epilimnion utożsamiany jest z warstwą eufotyczną a hipolimnion z warstwą troficzną,
- 2) fosfor całkowity jest sumą dwóch składowych fosforanów i fosforu w zawiesinie,
- 3) w epilimnionie następuje przemiana fosforanów w fosfor w zawiesinie w procesie fotosyntezy,
- 4) w całym jeziorze następuje przemiana fosforu w zawiesinie w fosforany w procesie mineralizacji,
- 5) uwzględniona zostaje sedymentacja fosforu w zawiesinie oraz wymiana fosforu pomiędzy warstwami, spowodowana ruchami mas wody oraz dyfuzją,
- 6) szybkość przemiany obu rodzajów fosforu jest liniową funkcją ich stężeń.

Założenia te prowadzą do czterowymiarowego liniowego układu równań różniczkowych, opisującego dynamikę przemian. Imboden w oparciu o swój model zaproponował podział jezior na eutroficzne i oligotroficzne jako kryterium przyjmując dopuszczalne zużycie tlenu w hipolimnionie, w okresie letnim, w procesie mineralizacji, nieprzekraczające 1 mg/m^3 . Vollenweider [3] dokonując krytycznej analizy klasyfikacji Imbodena stwierdził, że proponowane dopuszczalne ładunki fosforu są szczególnie nieadekwatne dla jezior z głębokością Z: $2 \leq Z \leq 30$.

Wielowymiarowe modele bioprodukcji

Modele tej grupy składają się z dwóch niezależnych części, z których pierwsza opisuje przemiany biologiczno-chemiczne, druga transport wody z zawartymi w niej substancjami. Struktura biologiczno-chemicznej części modelu generowana jest strukturą opisywanej biocenozy, którą tworzą wyróżniane podsystemy: producentów i konsumentów w którym opisane są zmiany masy fitoplanktonu i zooplanktonu oraz podsystem przemian organicznych i nieorganicznych związków fosforu, azotu (w niektórych mo-

delach dodatkowo węgla i krzemu [15]). Zjawiska zachodzące w biologiczno-chemicznej części systemu ujawnione są w modelach w postaci procesów:

- 1) wzrostu i śmierci producentów i konsumentów,
- 2) pożerania przez konsumentów wyższego rzędu,
- 3) wydzielania produktów przemiany materii,
- 4) konsumpcji związków nieorganicznych w procesie wzrostu producentów,
- 5) mineralizacji detritusu,
- 6) sedymentacji materii organicznej.

Część opisująca transport wody determinowana jest przyjęciem określonej struktury przestrzennego podziału jeziora, którą tworzą segmenty jednorodne, ze względu na stężenie znajdujących się w nim substancji. W większości wypadków stosowany jest podział warstwowy. Koniecznym jest określenie parametrów morfometrycznych każdego segmentu oraz współczynników wymieszania i dyfuzji pomiędzy nimi.

Dalsza analiza modeli bioprodukcji ograniczona zostaje do analizy struktury biologiczno-chemicznej części modelu.

Podsystem producentów i konsumentów jest częścią główną każdego modelu. W większości modeli zjawiska zachodzące w tym podsystemie opisywane są układem równań różniczkowych typu Lotka — Volterra:

$$\frac{dF}{dt} = (u_F - R_F) F - gFZ \quad (3)$$

$$\frac{dZ}{dt} = (aag F - R_Z) Z$$

gdzie:

- F — liczebność fitoplanktonu, najczęściej wyrażana stężeniem chlorofilu a ($\text{mg chl} / \text{m}^3$),
- Z — liczebność zooplanktonu, najczęściej wyrażana stężeniem węgla zawartego w zooplanktonie ($\text{mg C} / \text{m}^3$),
- u_F, R_F — współczynnik wzrostu i respiracji fitoplanktonu (1/dzień),
- g — współczynnik filtracji ($\text{m}^3 / \text{mg C}$ dzień),
- a — współczynnik efektywności asymilacji,
- R_Z — współczynnik respiracji zooplanktonu (1/dzień),
- a — stosunek węgiel — chlorofil a ($\text{mg C} / \text{mg chl } a$).

Fitoplankton rozpatrywany jest jako całość lub podzielony na grupy. W modelu CLEAN [16] fitoplankton podzielono na nanoplankton i plankton sieciowy, modelu Biermana [17] rozpatruje się trzy grupy: okrzemki, glony zielone i sinice. Konsumentami to zooplankton, rozpatrywany jako całość lub podzielony na zooplankton roślinożerny (herbivorus) i drapieżny (carnivorus), stosowany bywa także podział na zooplankton pożerający wyłącznie detritus bądź fitoplankton.

Współczynnik wzrostu fitoplanktonu u_F jest funkcją natężenia światła, temperatury wody i stężeń nieorganicznych związków N, P, Si, o ilości argumentów i sposobie opisu ich wpływu

na u_F decyduje twórca modelu. W analizowanych modelach stosowane są najczęściej dwa typy zależności:

$$u_F = u_{\max} \cdot u(T) \cdot u(I) \cdot u(P) \cdot u(N), [15]$$

$$u_F = u_{\max} \min(u(I) \cdot u(P) \cdot u(N)/u(T), [17]$$

gdzie:

u_{\max} — maksymalna wartość współczynnika wzrostu otrzymana w optymalnych warunkach (1/dzień),

$u(I)$, $u(T)$, $u(P)$, $u(N)$ — czynniki wyrażające wpływ odpowiednio: natężenie światła, temperatury wody, stężeń, fosforu i azotu na wielkość u_F (1/dzień).

Wpływ stężeń mineralnych form azotu i fosforu na u_F obliczany jest we współczesnych metodach bioprodukcji w oparciu o dwie odmienne teorie:

- 1) klasyczną teorię Monoda, w myśl której stężenie substancji biogennej na zewnątrz komórki determinuje szybkość wzrostu zgodnie z prawem Michaelisa — Mentena,
- 2) teorię w myśl której proces konsumpcji związków mineralnych odbywa się w dwóch etapach: pochłonięcia i zmagazynowania a szybkość wzrostu zależy od stężeń substancji biogennej wewnątrz komórki [18].

Pozostałe parametry wchodzące w skład układu (3) zależą od temperatury w sposób liniowy lub zgodnie z prawem Van't Hoff'a [15], współczynniki g i a zależą także od ilości fitoplanktonu [15].

Procesy zachodzące w podsystemie przemian związków organicznych i nieorganicznych opisywane są klasycznymi zależnościami uwzględniającymi wpływ temperatury liczebności fitoplanktonu na szybkość reakcji.

Problem weryfikacji modeli bioprodukcji sprowadza się do określenia wartości parametrów, wchodzących w skład równań modelu. Większość parametrów tych modeli może zostać wyznaczona drogą pomiaru odpowiednich wielkości, stosowane są także różne metody estymacji (kalibracji). Nieznane wartości parametrów otrzymywane są drogą minimalizacji różnicy pomiędzy wskazaniem modelu a pomiarem.

Wartości wielu parametrów stosowanych w modelach znaleźć można w bardzo obszernej monografii Jorgensena [19]. Z problemem weryfikacji modelu związana jest kwestia wyboru klasy zjawisk modelowanych, do klasy istotnie ważnej z punktu widzenia celu jaki stoi przed modelem. Analizę pewnych wskaźników znaleźć można w pracy Jorgensena [20] oraz w pracy Halfona [21]. Z zagadnieniem tym łączy się kwestia stabilności modelu oraz czułości modelu na zmiany parametrów. Problemy te, będące przedmiotem badań ekologii teoretycznej nie zostały włączone w zakres tego artykułu.

Wybór modelu

Praktyczne zastosowanie przedstawionych modeli to przede wszystkim problem wyboru modelu optymalnego ze względu na cel, któremu ma on służyć.

W przypadku modelu Vollenweidera i prac związanych z tą koncepcją należy podkreślić, że prostota i łatwość korzystania z tego modelu nie powinna przysłonić ograniczeń, wynikających z założeń leżących u jego podstawy. Model ten nie powinien być stosowany przy badaniu dynamiki przemian jeziora w małej skali czasowej oraz dla jezior, w których fosfor nie jest głównym czynnikiem limitującym bioprodukcję. W przypadku gdy założenia są spełnione nie ma istotnych różnic pomiędzy wskazaniem modeli tego typu a wskazaniem wielowymiarowych modeli bioprodukcji. Model ten jest najczęściej stosowany, szczególnie przy ocenie dopuszczalnego obciążenia fosforem, nie zmieniającego stanu troficznego jeziora.

W przypadku gdy interesuje nas dynamika przemian jeziora w skali roku, lub gdy fosfor nie jest dominującym czynnikiem limitującym zmuszeni jesteśmy dokonać wyboru w klasie wielowymiarowych modeli bioprodukcji. Decydując się na ten krok musimy zdawać sobie sprawę z wysokich kosztów weryfikacji modelu. Koszty te spowodowane są koniecznością estymacji (kalibracji) parametrów modelu na podstawie wyników pomiarów, wymagany jest zatem co najmniej jednorazowy cykl pomiarów wielkości, które mają być modelowane (minimalnie 1—2 pomiary miesięcznie).

Wybór modelu tej grupy związany jest z przyjęciem pewnej klasy zjawisk dominujących w procesie przemian jeziora. Do tej pory w literaturze światowej brak jest kryteriów pozwalających wyodrębnić tę klasę w sposób jednoznaczny. Z doświadczeń autora, który próbował stosować modele bioprodukcji dla modelowania przemian, w mocno zeutrofizowanych jeziorach (jeziora: Popielewskie i Szydłowskie koło Gniezna [22]) wynika, że bardzo istotnym zjawiskiem jest wymiana fosforu pomiędzy osadami a wodą jeziora.

LITERATURA

1. R. A. VOLLENWEIDER: *Möglichkeiten und Grenzen elementarer Modelle der Stoffbilanz von Seen*. Arch. Hydr. 1969 nr 66, s 1—36.
2. R. A. VOLLENWEIDER. *Input — Output Models*. Schweiz. Z. Hydr. 1975, nr 37, s 53—84.
3. R. A. VOLLENWEIDER: *Advances in defining eutrophic loading levels for phosphorus in lake eutrophication*. Mem. Ist. Ital. Hydr. 1976, nr 33, s 53—83.
4. P. J. DILLON, F. H. RIGLER: *A test of a simple nutrient budget model predicting the phosphorus concentration in lake water*. J. Fish. Res. Bd. 1974, nr 31, s. 1771—1778.
5. P. J. DILLON, F. H. RIGLER: *A simple method for predicting the capacity of lake for development based on lake tropic states*. J. Fish. Res. Bd. 1975, nr 32, s 1519—1531.
6. H. T. MERCIER, D. P. LARSEN: *Phosphorus retention capacity of lakes*. J. Fish. Res. Bd. 1976, nr 38, s. 1742—1750.
7. W. B. KIRCHER, P. J. DILLON: *An empirical method of estimating the phosphorus in lakes*. Water Resource Res. 1975, nr 11, s 182—183.
8. D. W. SCHINDLER: *Factors regulating phytoplankton production and starding crop in the world freshwater*. Limnol. Ocean. 1978, nr 23, s 478—486.
9. W. C. SONZOGNI, P. C. UTTOMARK, G. F. LEE: *A phosphorus residence time model*. Water Res. 1976, nr 10, s 429—435.

10. J. R. JONES, R. W. BACHMAN: Prediction of phosphorus and chlorophyll levels in lakes. *Journal WPCF*. 1976, nr 48, s 2176—2183.
11. D. M. IMBODEN: Limnologische Transport und Wahrstoff Modelle. *Schweiz. Z. Hydr.* 1973, nr 35, s 29—69.
12. D. M. IMBODEN, R. GRACHTER: A dynamic lake model for trophic state prediction. *Ecol. Modelling*. 1978, nr 4, s 77—88.
13. C. R. O'Melia: An approach to the modelling of lakes. *Schweiz. Z. Hydr.* 1972, nr 34, s 1—34.
14. W. J. SNODGRASS, C. R. O'MELIA: Predictive model for phosphorus in lakes. *Envir. Sci. Techn.* 1975, nr 9, s 937—944.
15. D. M. di TORO: Mathematical models of water quality in large lakes. Part 2. EPA 600/3-80-065. 1980.
16. J. A. BLOOMFIELD: Aquatic modelling in the eastern deciduous forest biome. *Modelling the eutrophication process*. Ed. E. J. Middlebrooks. 1973.
17. V. J. BIERMAN, D. M. DOLAN: Mathematical modelling of phytoplankton dynamics in Saqina-wa Bay, Lake Huron. *Proceeding of the Conf. on Env. Modeling and Simulation*. Cincinnati. Ohio. 1976.
18. V. J. BIERMAN, F. H. VERHOFF: Multi — nutrien dynamic models of algal krowth and species competition in eutrophic lakes. *Modelling the autrophication process*. Ed. E. J. Middlebrooks. 1973.
19. S. E. JORGENSEN: *Handbook of environmental data and ecological parameters*. ISEM. Kopenhaga. 1979.
20. S. E. JORGENSEN, H. MEJER, M. FRIIS: Examination of a lake model. *Ecol. Modelling*. 1978, nr 4, s 253—278.
20. S. HALFON: Relative stability of ecosystem linear models. *Ecol. Modelling*. 1978, nr 2, s 279—296.
22. M. DMOCHOWSKI: Modele rozprzestrzeniania i przemian zanieczyszczeń w zbiornikach sztucznych i naturalnych wraz z weryfikacją dla wybranych zbiorników. *Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej*. Wrocław. 1980.